Acta Academiae Scientiarum Taurinensis

Supplemento al Volume 120 (1986)
degli Atti della Accademia delle Scienze di Torino

Scritti Vari di Fisica Matematica dedicati a CATALDO AGOSTINELLI in occasione del suo novantesimo compleanno

I.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Accademia delle Scienze, Torino
Via Accademia delle Scienze, 6 e Via Maria Vittoria, 3
1987

Acta Academiae Scientiarum Taurinensis

Scritti Vari
di Fisica Matematica dedicati a
CATALDO AGOSTINELLI
in occasione del suo
novantesimo compleanno

I.
Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

Accademia delle Scienze, Torino
1987

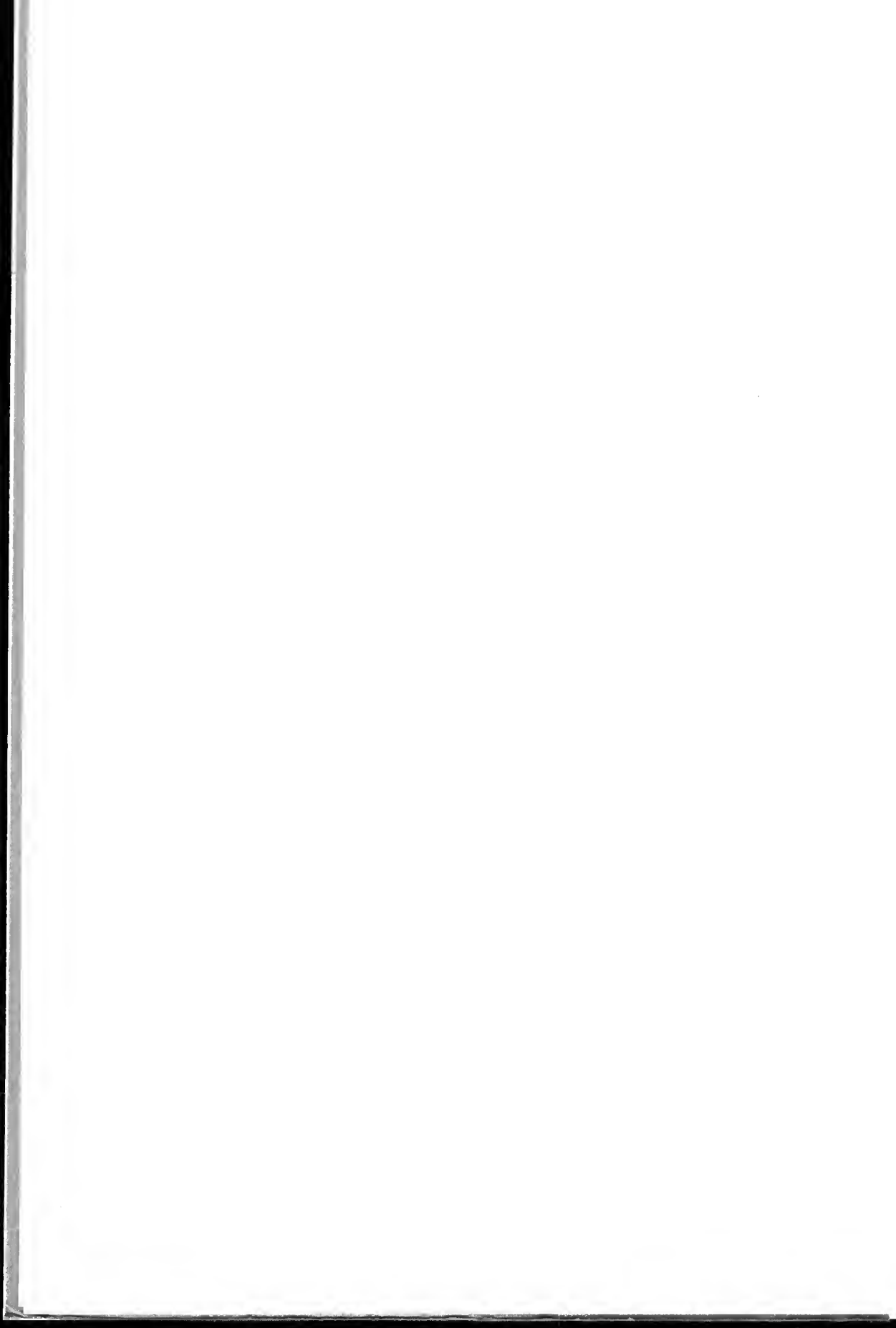
Il 16 dicembre 1984 il Professor Cataldo Agostinelli ha compiuto novant'anni.

Il 9 novembre 1984, per festeggiare l'avvenimento, ha avuto luogo a Torino presso l'Università un «Incontro» in Suo onore, al quale hanno partecipato varie personalità ed esponenti della cultura, numerosissimi colleghi, amici e allievi, giunti da ogni parte d'Italia. In particolare, erano presenti il Rettore dell'Università di Torino, Prof. Mario Umberto Dianzani, il Sindaco di Torino, On. Diego Novelli, una nutrita rappresentanza di Ceglie Messapico, Sua città natale, il Rettore del Politecnico, Prof. Lelio Stragiotti, il Prof. Carlo Ferrari in rappresentanza dell'Accademia Nazionale dei Lincei e del suo Presidente Prof. Giuseppe Montalenti, il Presidente dell'Accademia delle Scienze di Torino, Prof. Silvio Romano, il Presidente dell'Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Prof. Antonio Pignedoli, in rappresentanza anche dell'Accademia delle Scienze di Bologna e del suo Presidente Prof. Dario Graffi, il Presidente dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Prof. Alfonso Giordano, il Preside della Facoltà di Scienze dell'Università di Torino, Prof. Enzo Borello, il Prof. Luigi Gatteschi in rappresentanza del Presidente del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R. Prof. Carlo Ciliberto, il Prof. Giuseppe Grioli in rappresentanza del Presidente del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R. Prof. Luigi Salvadori, il Direttore del suddetto Gruppo, Prof. Vinicio Boffi, il Col. Gianfranco Gasperini in rappresentanza della Scuola Militare di Applicazione e del suo Comandante Gen. Natale Dodoli.

In quell'occasione numerosi colleghi proposero di pubblicare una raccolta di scritti dedicati al Professor Agostinelli ed è pertanto con vivo piacere che abbiamo dato vita a questa proposta, che è il modo migliore per testimoniargli in maniera duratura l'affetto, la riconoscenza e la stima per tutto quanto nella Sua lunga vita Egli ha dato, come studioso, come scienziato e come maestro.

In questa raccolta abbiamo inserito anche le parole di saluto rivolte in quell'occasione al Professor Agostinelli dal Rettore Prof. Dianzani, dal Prof. Romano e dal Prof. Ferrari, e il discorso tenuto dal Prof. Pignedoli.

Dionigi Galletto
Silvio Nocilla

Torino, 6 settembre 1987

INDICE

Pagine

DISCORSI

SCRITTI

DISCORSI

Parole di saluto rivolte dal Rettore dell'Università di Torino Prof. Mario Umberto Dianzani all'«Incontro in onore del Professor Cataldo Agostinelli in occasione del suo novantesimo anno di età»

Siamo qui riuniti per festeggiare, in Sua presenza, il Professor Cataldo Agostinelli, una delle glorie del nostro Ateneo. È per me un vero piacere poter cominciare la mia attività di Rettore con una cerimonia del genere e di poter così rendere a Cataldo Agostinelli il tributo di stima e di affetto, oltre che il ringraziamento, dell'Università in cui Egli ha lavorato per tanti anni, dandole il lustro della Sua scienza e della Sua personalità. Per me personalmente il piacere è aumentato dal fatto che è sotto la Presidenza e dietro proposta di Cataldo Agostinelli che, molti anni fa, venni nominato socio corrispondente della gloriosa Accademia delle Scienze di Torino.

Mi sia consentito, prima di ricordare a noi tutti ciò che il Professor Agostinelli ha rapprensentato per la nostra Università, porgere il ringraziamento ed il saluto dell'Università di Torino e mio personale a tutte le Autorità che sono intervenute, ed in particolare al Sindaco di Torino Diego Novelli, alla rappresentanza del Comune di Ceglie Messapico, città natale di Cataldo Agostinelli, città che è presente con il suo gonfalone e coi Consiglieri Comunali Enrico Turrisi e Michele Ciraci, al Prof. Lelio Stragiotti, Rettore del Politecnico di Torino, al Prof. Silvio Romano, Presidente dell'Accademia delle Scienze di Torino, al Prof. Carlo Ferrari, rappresentante dell'Accademia dei Lincei e del suo Presidente Prof. Giuseppe Montalenti, al Prof. Antonio Pignedoli, Presidente dell'Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena e rappresentante l'Accademia delle Scienze di Bologna e il suo Presidente Prof. Dario Graffi, al Prof. Alfonso Giordano, Presidente dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, al Prof. Enzo Borello, Preside della Facoltà di Scienze dell'Università di Torino, al Prof. Luigi Gatteschi, rappresentante del Comitato per la Matematica del C.N.R. e del suo Presidente Prof. Carlo Ciliberto, al Prof. Giuseppe Grioli, rappresentante del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R. e del suo Direttore Prof. Vinicio Boffi, al Prof. Giorgio Cavallo, mio predecessore e per nove anni Rettore dell'Università di Torino. La contemporanea presenza di tanti illustri Scienziati e di tante Autorità accademiche testimonia l'importanza dell'avvenimento di oggi, e soprattutto quello della figura di Cataldo Agostinelli, che oggi festeggiamo. A Cataldo Agostinelli, che per tanti anni ha onorato l'Università di Torino e la Scienza italiana, porgo il mio saluto particolare, denso di stima, di riconoscenza per quanto ha fatto per noi tutti e di personale affetto.

anni ha onorato l'Università di Torino e la Scienza italiana, porgo il mio saluto particolare, denso di stima, di riconoscenza per quanto ha fatto per noi tutti e di personale affetto.

Cataldo Agostinelli ha illustrato per molti anni, con la Sua attività e con la Sua personalità, la nostra Università, che ha tante glorie lontane, ma anche tante glorie recenti. Egli può senza dubbio essere considerato una di queste. Oltre che un valente scienziato, i cui meriti sono stati riconosciuti attraverso tutte le cariche ricoperte nella Sua lunga carriera, Cataldo Agostinelli ha rappresentato per i Suoi allievi un esempio da seguire. L'affetto e la simpatia da cui è circondato dimostrano che la Sua personalità ha lasciato una traccia indelebile.

Egli nacque a Ceglie Messapico (Brindisi) il 16 dicembre 1894, ma si trasferì ben presto a Torino, ove si laureò in Ingegneria industriale meccanica, con pieni voti, presso il Politecnico nel 1920. Subito assunto alla direzione del Servizio elettrico presso le Acciaierie Fiat di Torino, vi rimase per circa un decennio.

Si laureò poi, nel 1930, in Matematica all'Università di Torino.

Nel 1931 vinse il posto di professore ordinario di Meccanica nell'Istituto Industriale «Omar» di Novara, e vi insegnò fino al 1938.

Gli anni della Sua prima attività rappresentano la testimonianza di come un ingegno forte e volitivo come il Suo potesse dedicarsi alla ricerca, pur svolgendo compiti pratici nell'industria e nell'insegnamento non universitario. Dal suo posto di insegnante dell'Istituto Tecnico, infatti, riuscì a conseguire brillantemente la libera docenza in Meccanica razionale già nel 1935. Nel 1935-36 ebbe l'incarico dell'insegnamento di Meccanica razionale nella Facoltà di Scienze dell'Università di Torino, e nel 1938-39 ricoprì lo stesso incarico nella Facoltà di Scienze dell'Università di Modena. Nel 1939 riusciva primo vincitore nel concorso di Meccanica razionale nell'Università di Messina, e veniva nominato titolare di tale disciplina a Catania, per chiamata unanime. Nel 1941 passò a Modena, per restarvi fino al 1943, quando, nominato Professore ordinario, venne chiamato alla cattedra di Meccanica superiore della nostra Università. Questa cattedra ha ricoperto fino al 31 ottobre 1965, data del suo collocamento fuori ruolo. La sua nomina a Professore emerito dell'Università di Torino ha costituito il giusto riconoscimento di questo Suo continuo impegno.

Cataldo Agostinelli è Socio dell'Accademia Nazionale dei Lincei e dell'Accademia delle Scienze di Torino, che ha presieduto nel triennio 1979-82; è inoltre Socio Onorario dell'Istituto di Bologna e dell'Accademia delle Scienze di Modena, e Socio Corrispondente dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Ha ricevuto la medaglia d'oro dei Benemeriti della Scuola, della Cultura e dell'Arte, nonché il premio del Ministero della Pubblica Istruzione per il

1968. Gli è stata conferita l'onorificenza di Commendatore dell'Ordine al merito della Repubblica.

La sua attività scientifica è raccolta in più di 200 pubblicazioni e spazia in tutti i campi della Meccanica e della Fisica matematica classica.

Tra le sue ricerche emergono quelle sul fenomeno delle aurore boreali, quelle sui sistemi dinamici corrispondenti, quelle sulle trasformazioni dinamiche, quelle di meccanica celeste relative al problema dei tre corpi. A queste vanno aggiunte le ricerche sull'equilibrio di masse fluide rotanti, di grande interesse astronomico e astrofisico, nonché quelle sulla propagazione delle onde elettromagnetiche e soprattutto sulla magnetofluidodinamica, un campo di ricerche di cui è stato fra i pionieri in Italia. Ma soprattutto vanno ricordati i Suoi fondamentali contributi alla meccanica analitica, ai quali già in parte si è accennato, soprattutto quelli relativi all'equazione di Hamilton-Jacobi. Questi contributi sono pubblicati tra le Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino: essi hanno dato origine ad importanti moderne ricerche da parte di noti giovani studiosi non solo nell'ambito della meccanica analitica, ma anche in quello della matematica pura e precisamente della geometria.

Lo spaziare dell'attività di Agostinelli attraverso campi così svariati dimostra l'eccellenza della Sua personalità scientifica, capace di sintesi e di associazioni che caratterizzano gli intelletti illuminati. Del resto, è solo così che si fa della vera scienza, nel superamento delle barriere artificiali che le necessità della didattica hanno imposto, nel tempo, alle singole discipline. L'eccessiva specializzazione, cui fatalmente oggi si tende, favorisce l'approfondimento dei singoli problemi, ma fa anche correre il rischio di mantenerli isolati ed improduttivi nel quadro globale. È proprio di poche menti il riuscire a fare i necessari collegamenti, che sono la garanzia del progresso. Cataldo Agostinelli è stato, ed è ancora oggi, una di queste menti.

Nella vita convulsa che viviamo nell'Università in questo scorcio di secolo, abbiamo assistito al dissacramento delle personalità e delle figure carismatiche. Quelle che, nonostante tutto, sono rimaste, avevano qualcosa in più degli altri. Oltre alla posizione giuridica, che conta poco, ed oltre alla Scienza, che invece conta molto, possedevano anche il carisma di un'onestà integerrima e di un'umanità capace di superare ogni contrasto. Ed è soprattutto per questi meriti che Cataldo Agostinelli è stato ed è per noi tutti un Maestro. Ho detto per tutti, e non solo per i Suoi allievi. Per un'Università le caratteristiche dei Maestri che vi hanno insegnato e vi hanno vissuto vogliono dire molto. È su queste figure che si costruisce la tradizione, la quale è substrato storico del divenire e del progresso.

Noi oggi festeggiamo Cataldo Agostinelli, ma è soprattutto Lui che ci ha onorato in tutti gli anni della Sua attività ed attraverso le Sue doti. Io mi dichiaro orgoglioso di reggere oggi un' Università in cui Egli ha insegnato.

Parole dette dal Prof. Silvio Romano, Presidente dell'Accademia delle Scienze di Torino

Sono lieto di portare l'adesione dell'Accademia delle Scienze di Torino a questo incontro in onore del Prof. Cataldo Agostinelli, al quale, interpretando i sentimenti dei consoci, voglio dire, con grande semplicità ma con tutto il cuore, la nostra riconoscenza ed il nostro affetto.

Gli siamo riconoscenti, anzitutto per l'intensa attività svolta all'Accademia, alla quale appartiene da 33 anni: autore di sei «Memorie» e di 42 contributi agli «Atti»; per sei anni Segretario della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali; per sei anni Direttore della stessa Classe; per tre anni, dal 1979 al 1982, Presidente dell'Accademia.

Gli siamo riconoscenti per lo straordinario impegno didattico svolto ininterrottamente, a cominciare dal 1933, nelle Facoltà di Scienze delle Università di Modena, Catania e Torino, fino al giorno del Suo collocamento a riposo, avvenuto il 1° novembre 1970.

Gli siamo riconoscenti per la Sua ampia produzione scientifica, raccolta in oltre 200 note e memorie, che si estende a tutti i rami della meccanica ed a quasi tutti quelli della fisica matematica: testimonianze della Sua intensa attività didattica e della Sua molteplice ed originale attività di ricerca, sono: il conferimento della medaglia d'oro dei Benemeriti della Scuola, della Cultura e dell'Arte; il premio del Ministero della Pubblica Istruzione per il 1968; la nomina a Socio Nazionale dell'Accademia dei Lincei e dell'Accademia delle Scienze di Torino, a Socio Onorario dell'Istituto di Bologna e dell'Accademia delle Scienze di Modena, a Socio Corrispondente dell'Istituto Lombardo.

Cataldo Agostinelli, a unanime giudizio, è uno studioso di prim'ordine, che profuse dalla cattedra, profuse e profonde ancora oggi attraverso le sue opere, i tesori di una cultura vasta e varia; è un insigne Maestro che molto ha contribuito e continua a contribuire al progresso ed alla diffusa conoscenza delle discipline da lui coltivate; un insigne Maestro che ha sempre saputo che è la viva rappresentazione della dignità della Scienza quello che muove gli animi, quello che ispira le menti e trasforma i discepoli in devoti cultori del vero.

Ammiriamo in Cataldo Agostinelli l'uomo di grande levatura morale, l'uomo ricco di umanità e di dignità insieme, l'uomo che ha sempre preferito coniugare il verbo «essere» anziché il verbo «avere». Ammiriamo in Cataldo Agostinelli l'austerità del vivere laborioso e oggi, festeggiandolo in occasione del suo novantesimo compleanno, rendiamo omaggio al sentimento del dovere come ragione di vita.

Parole dette dal Prof. Carlo Ferrari in rappresentanza del Presidente dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Prof. Giuseppe Montalenti

Il Presidente dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Prof. Giuseppe Montalenti, trattenuto con suo grande rammarico a Roma da impegni urgenti, mi ha dato il gradito incarico di portare il saluto e formulare gli auguri più fervidi suoi personali e di tutta l'Accademia all'illustre Consocio e carissimo amico Prof. Cataldo Agostinelli: è tutta l'Accademia, compreso il personale, che si associa a questa manifestazione di omaggio, e questo è un chiaro indice che all'ammirazione per l'attività scientifica di Cataldo Agostinelli è unita la simpatia per la sua persona. Dell'attività scientifica parlerà colla sua consueta maestria l'amico Antonio Pignedoli; io mi limiterò ad accennare a due altri aspetti della sua personalità, quello accademico, e quello umano.

Cataldo Agostinelli accademico: egli ha sempre avuto, e tuttora ha, il più alto senso della dignità e della responsabilità che derivano dall'appartenere a quei gloriosi Consessi che sono le Accademie, che tanto hanno contribuito al progresso scientifico nel passato, e che altrettanto potrebbero fare nel presente solo che fossero più intelligentemente aiutate. Dell'Accademia delle Scienze di Torino è stato successivamente Segretario di Classe, Direttore di Classe, Vice-presidente e Presidente, ed in ciascuna di queste cariche ha svolto il suo compito con assoluta dedizione, senza risparmio di fatiche, sempre presente a dare il suo efficace contributo alla soluzione dei problemi, spesso incresciosi, che angustiano la vita accademica.

Cataldo Agostinelli uomo: l'avere una grande intelligenza in un dato campo, l'avere una spiccata attitudine alla ricerca scientifica sono doti innate, sono doni di Dio: se uno non ha queste doti non se le può dare. Per questo, e in questo senso, l'avere tali doti non costituisce un grande merito della persona umana, ma l'essere buono, e conservarsi buono nonostante le avversità della vita, le sollecitazioni, le aggressioni del mondo esterno, questo richiede una lotta continua, quotidiana, ed il riuscire vincitore in detta lotta, questo costituisce un grande merito

della persona umana. Cataldo Agostinelli ha questo merito pienamente. Ricordo che il mio grande, amato Maestro, Modesto Panetti, soleva dire: l'uomo è come il vino, quando è buono, più invecchia e più diventa buono. Carissimo Cataldo, il tuo vino è ottimo: ti ammiriamo per quanto hai fatto per la Scienza, ti vogliamo bene per l'esempio di vita che ci hai dato.

Discorso tenuto dal Prof. Antonio Pignedoli

Mio caro Maestro e gentile signora Angiola,

io non so se la mia commozione mi consentirà di fare e concludere il discorso cui mi accingo. Ma sarà colpa mia e del mio affetto. Le mie parole Vi sono dedicate con tutto il cuore. Ringrazio vivamente i colleghi dell'Istituto di Fisica Matematica "Giuseppe Luigi Lagrange", con in testa Dionigi Galletto, per avere voluto e organizzato questo affettuoso "incontro in onore di Cataldo Agostinelli in occasione del suo novantesimo anno di età". E sono grato per l'incarico che mi è stato affidato e che mi onora.

Agli amici del Dipartimento di Matematica dell'Università ed a quelli del Dipartimento di Matematica del Politecnico vada il mio saluto riconoscente e devoto; è il saluto di uno che si onora di essere scientificamente figlio di Cataldo Agostinelli ed espressione della Scuola fisico-matematica di Torino. Porto l'adesione della Accademia nazionale di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, della quale Cataldo Agostinelli è socio onorario; e mi onora anche il fatto di avere l'incarico di rappresentare qui l'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Accademia benedettina, della quale il festeggiato è pure membro.

Il presidente dell'Accademia di Bologna, Dario Graffi, del quale mi piace ricordare in questo momento che egli è stato a suo tempo docente nella Università di Torino, me ne incarica esplicitamente ed è vivamente dispiaciuto per non potere essere qui. Ragioni di salute lo impediscono. Noi gli inviamo il nostro beneaugurante pensiero.

Signor Sindaco della città di Torino, autorità, insigni colleghi e amici, signore e signori,

questa è una giornata stupenda. Perché in un mondo certamente dotato di notevoli luci ma che, in certi suoi strati meno ricchi di luce, dimentica talvolta la funzione essenziale della scuola e l'alto magistero della cultura autentica e della stessa ricerca scientifica, la giornata ha il valore essenziale di ricordarle e di inchinarsi dinanzi a tale funzione e

a tale magistero, valori essenziali per lo spirito umano e per la vita stessa della società; intendo dire anche per il suo autentico progresso civile.

Oggi si onora uno scienziato, un maestro che, laureatosi in Ingegneria nel 1920 e poi in Matematica nel 1930, ha compiuto a Torino un servizio decennale nella grande industria meccanica e poi ha dato tutto se stesso alla Scuola, alla ricerca, alle istituzioni scientifiche in anni ed anni di attività feconda e onorando la vita accademica con una intensità e continuità esemplari. Egli ha creduto e crede nel valore non soltanto conoscitivo ma anche educativo della Scienza. E qui mi sia consentito di fare alcune considerazioni di carattere generale. Lo sviluppo scientifico presenta alcune caratteristiche che, oggi, in un mondo che vive cataliticamente le sue giornate, possono trasformarsi in effettivi drammi. Uno di tali aspetti è anzitutto la specializzazione. Mentre, da una parte, quest'ultima costituisce una necessità vitale per la concreta ricerca di risultati, estremamente ardui ma particolari, essa rischia, dall'altra, di approdare alle rive di una super-specializzazione senza leibniziane finestre, cioè ad una non-comunicabilità fra le varie discipline, ad una sorta di esaurimento del pensiero in una analisi mono-settoriale. In una visione a scadenza neppure tanto lontana, si potrebbe giungere a disperare, nella immersione, per così dire, in una specie di inconoscibilità babelica fra i vari linguaggi scientifici. E si osservi bene: non solo nell'ambito di discipline intuitivamente ed essenzialmente diverse, ma sul "terreno" di una stessa disciplina o di uno stesso "territorio di ricerca". In una situazione del genere, il mistero, invano tentato, si allontanerebbe sempre più: in un crepuscolo il cui naturale approdo sarebbe la notte. Di qui gli agnosticismi e le negazioni che provengono dalla perdita di una visione filosofica generale: quella che da Platone ad Agostino da Tagaste, da Aristotele e Tommaso d'Aquino, da Cartesio a Leibniz, da Kant a Bergson, a Maritain ha tormentato ed elevato lo spirito umano nella conoscenza sintetica delle parallele e crescenti acquisizioni scientifiche: in una meditazione generale ed unificante. Perdita immensa non solo culturale sarebbe.

Un altro aspetto dello sviluppo scientifico, sul quale occorre assolutamente meditare, è la questione della immanenza o meno della ricerca scientifica, meglio della Scienza in generale. Io credo che non si possa affermare che la Scienza riguardi soltanto il mondo dell'immanente, il terreno di ciò che è immanente. A mio avviso occorre assolutamente distinguere e farlo con estrema chiarezza. La Scienza riguarda il mondo dell'immanente allorché si ferma ad essere ricerca di risultati specifici, della Fisica, della Chimica, delle discipline biologiche od abiologiche. Ma va a contatto stretto col mondo trascendente dello spirito quando si

colloca sul grande terreno inter-disciplinare, in una meditazione organica e sintetica sui risultati scientifici specialistici: per dare un esempio, quando, in una visione dei problemi riguardanti il "caso e la necessità" arriva con Monod alla disperante considerazione dell'uomo emerso soltanto per caso nell'universo indifferente, drammaticamente solo in tale universo in cui domina una radicale aleatorietà e l'antica alleanza è totalmente infranta. Oppure, nonostante tutto, allorché, nella concezione, che mi permetterò di chiamare termodinamico-filosofica, di Ilya Prigogine, cerca di ristabilire una "nuova alleanza" dell'uomo con la natura.

Intendo dire, in generale, che la Scienza entra nel mondo trascendente allorché si pone i grandi problemi delle origini di tutte le cose e della loro evoluzione, del mondo inorganico ed organico e della vita e quello dell'effettivo destino dell'uomo nel suo viaggio su questa Terra. Lo scienziato è sempre, nel suo effettivo atteggiamento, anche un filosofo, esplicitamente od implicitamente.

Qui si delinea l'aspetto etico della ricerca scientifica e si configurano le forti responsabilità che ne derivano. Di fronte all'uomo e al suo destino, lo scienziato ha il dovere di indirizzare la Scienza alla ricerca pura e disinteressata della verità e le applicazioni al bene di tutti. Si configura così anche il problema di dare una risposta alla grande domanda che non si può eludere: una risposta razionale al senso profondo che si annida entro la schiacciante fenomenologia legata alla evoluzione di questo gigantesco Universo e alla vita dell'uomo: essere intelligente il cui indirizzo di casa sta sul granello rappresentato dal pianeta Terra col suo raggio di soli seimilaquattrocento chilometri, nell'ambito di un sistema planetario le cui dimensioni si misurano in poche ore di luce. Di questo sistema diciamo; mentre esso fa parte di un universo stellare, la Via Lattea, che ha un diametro massimo di centomila anni-luce, contiene circa duecento miliardi di stelle ed è immerso nel Cosmo, che appare evolversi da forse venti miliardi di anni ed ha, nella sua espansione, le sue "frontiere", come si configurano attualmente, (sia consentita la espressione) alla distanza di forse venti miliardi di anni-luce da noi; e contiene milioni di Galassie.

Collocato a vivere fra due dimensioni-limite, estremamente remote, l'immensamente grande, di cui abbiamo detto e l'immensamente piccolo, per cui quel mondo, già estremamente complesso, che è il nucleo di un atomo si misura nell'ordine di grandezza di un milionesimo di mimionesimo di centimetro, l'uomo vive investito dalle ancora misteriose energie che regolano lo svolgersi stesso della sua vita, e ama ed odia, pensa e sogna. In sostanza opera sempre un ragguaglio dei fenomeni che

lo circondano al giudizio della sua ragione; talvolta o, meglio, in determinati momenti della sua attività mentale, crede addirittura di avere legato a se stesso il mondo e crede anche di dominarlo (in una certa misura è vero), mentre forze immani gli stanno intorno e modesti ed eroici insieme sono i suoi tentativi. Tuttavia nel faticoso progredire di questa creatura verso la conoscenza, come verso le forme diverse dell'arte e della poesia, si scorge una impronta divina.

Ed io non posso pensare che gli uomini tutti, dal primo all'ultimo e per tutta la loro storia, siano soltanto aggregati di cellule e che la ragione di cui l'uomo è stupendamente dotato sia soltanto, in fondo, il tremendo veicolo del suo soffrire o del suo essere con la propria disperazione in attesa del nulla. Non posso pensare che a nulla, per il destino dell'uomo, valgano il bene compiuto o il male consumato, l'eroismo nel dovere e l'ascetismo e un immenso amore da una parte o la violenza e l'odio dall'altra (e l'uomo è veramente e liberamente capace di scegliere l'una o l'altra strada e di seguirla). E così dovrebbe essere sempre, senza saperne il vero perché, la vera ragione, senza compensazioni alle sperequazioni di ogni genere, di tempo, di vita, di condizioni, di transeunti gioie e di immani dolori? Così sempre, per sempre e per tutta la vita di tutte le generazioni?

Io vedo la Scienza a contatto diretto col mondo dello spirito, intendo dire con una vita spirituale intensa, quali che ne possano essere la forma o la concezione.

A questa intensa vita dello spirito si collega il dovere sociale, la ineluttabile responsabilità morale che la Scienza ha di fronte alla collettività, di parlare chiaro allorché le ricerche scientifiche e le loro applicazioni possano essere strumentalizzate contro la vita stessa dell'uomo e della sua civiltà; o contro l'esistenza stessa dell'umanità; mentre sarebbe folle e peraltro utopistico concepire l'ipotesi di un arresto dell'autentico progresso scientifico. Il problema essenziale qui nella responsabile scelta etica delle vie del bene.

Ecco: non è retorico né laudatorio dire che Cataldo Agostinelli, in quelli che sono finora oltre sessant'anni di lavoro di ricerca e di magistero, dopo i suoi studi scolastici ed universitari, ha compiuto, come tutti sanno, perfettamente il suo alto dovere. E noi abbiamo l'obbligo di dirlo e di sottolinearlo oggi, mentre lo festeggiamo per i suoi novanta anni.

I caratteri essenziali di questo maestro, che è nostro caro dovere onorare, sono l'attività di ricerca e di magistero senza riposo, il silenzio e la dedizione, una forza inesausta di lavoro e un'aurea riservatezza.

A questo proposito mi sia consentito un ricordo personale di quasi quarant'anni fa, e mi sia consentito farlo solo perché ha il potere di incidere una figura. Appena dopo la liberazione del nord Italia, nel maggio del 1945, un discepolo di Cataldo Agostinelli chiese ad un amico dell'allora costituito raggruppamento autocarri di Modena se ci fosse, per avventura, un veicolo che andasse a Torino. Infatti quel discepolo desiderava andare a Torino per ritrovare il suo maestro, che aveva passato, tra l'altro, giornate non certo prive di rischi, oltre che di difficoltà. Gli fu risposto dall'amico: "Stanotte un autocarro deve partire da Modena, diretto a Spinetta Marengo, ma non c'è posto in cabina. Bisogna viaggiare nel cassone, sul carico". Quel discepolo chiese di salire e fu accontentato. Il viaggio fu lungo anche perché le difficoltà stradali non mancavano. A Spinetta cercò un treno per Torino e lo trovò. (Era trainato da un discreto locomotore trifase a biella triangolare). Giunto a Torino, il discepolo si diresse in Corso Orbassano e si fermò al Caffè Felice (all'angolo) per prendere qualcosa di caldo. Dalla porta a vetri usciva ancora un tubo da stufa, uno degli indici della vita di una grande città in un periodo bellico, in quel periodo bellico. Indi si diresse in Via Amerigo Vespucci dove allora abitava Cataldo Agostinelli. La porta di casa fu aperta dalla incomparabile signora Angiola. Il maestro era nello studio, in quello studio che precedette quello di Corso Duca degli Abruzzi. Era fra libri e carte. Emersero i ricordi dell'insegnamento a Modena e quelli del periodo bellico, compresi i giorni, non certo sicuri, dello sfollamento a La Loggia. L'immagine di quello studio, di quei libri, di quelle carte è l'immagine stessa, rimasta indimenticabile – per il discepolo – di una vita in corrispondenza stretta con la ricerca e con l'insegnamento. E' l'immagine, invariante rispetto al tempo, della vita del nostro maestro.

Se è vera, come è vera, la celebra affermazione secondo la quale non c'è insegnamento senza ricerca, come non v'è ricerca senza insegnamento che ne comunichi agli altri, e sopra tutto ai giovani, i tesori, essa è più che mai vera nel nostro caso; intendo proprio dire che è una proposizione rigorosamente dimostrata.

Noi dobbiamo meditare, anche per trarre continuo conforto nel nostro lavoro e nella nostra opera di educatori, da quella ricerca e da quell'insegnamento.

Penso che Cataldo Agostinelli non gradirebbe in questo momento una descrizione analitica della sua attività di ricerca fino ad oggi; ed io me ne asterrò anche in omaggio al carattere dell'incontro odierno. Non si tratta di un convegno a conferenze scientifiche o di un simposio, quanto piuttosto di un incontro famigliare. E l'affetto rifugge forse

ACCADEMIA DELLE SCIENZE TORINO

dalle analisi. Ma certo la coscienza mi rimorderebbe se non sottolineassi in maniera estremamente sintetica le grandi linee, direi i motivi conduttori della attività di ricerca del nostro maestro, anche perché esse sono state la chiave di volta di un proselitismo scientifico e della attività di ricerca dei discepoli.

L'attività di ricerca di Cataldo Agostinelli si è concretata fino ad oggi in almeno duecentosedici note e memorie scientifiche. I grandi temi della ricerca sono i seguenti.

Inizialmente egli si è occupato di Dinamica dei sistemi rigidi nello spazio ordinario, con estensione agli spazi ad n dimensioni; inoltre di omografie vettoriali nel senso più generale ed ha cominciato quella vasta ricerca sistematica sulle proprietà geometrico-differenziali dei sistemi dinamici che riprenderà successivamente, nel profondo.

In questa mia breve sintesi, ricorderò qui i vari lavori di Idrodinamica in cui un particolare interesse è rivolto alla teoria dei moti vorticosi. Sono poi molto importanti i risultati ottenuti per intuizione e con l'ausilio di uno sforzo algoritmico estremamente arduo, sulla integrazione per separazione di variabili delle equazioni di Hamilton-Jacobi e sulle proprietà dei sistemi dinamici corrispondenti.

E, per quanto concerne la Meccanica analitica, non è possibile non sottolineare subito le ricerche del nostro maestro riguardanti particolari sistemi lagrangiani così come, in generale, i sistemi olonomi e non-olonomi, nonché nuove ricerche sul moto dei sistemi rigidi, in particolare quelle riguardanti il moto di un corpo rigido con un punto fisso e relative questioni di stabilità.

Un altro gruppo di fondamentali ricerche è quello riguardante la Meccanica celeste; in particolare le figure di equilibrio dei pianeti, i problemi cosmogonici, il problema dei tre corpi celesti e quello del moto asintotico degli $n + 1$ corpi celesti, nonché la questione dello spostamento dei perieli dei pianeti ed in particolare, naturalmente, di Mercurio, problema non visto nell'ambito della Meccanica relativistica ma piuttosto in quello della Meccanica classica.

Nel campo dei problemi relativi alla teoria del campo elettromagnetico ed applicazioni, Agostinelli ha condotto ricerche sulla magnetizzazione in particolari condizioni geometriche, sulla propagazione elettromagnetica entro guide in condizioni diverse, sul moto di corpuscoli elettrizzati in campi magnetici ed elettromagnetici, con particolare riguardo alle questioni di formazione delle aurore polari.

Ha poi condotto una serie di ampie ricerche sistematiche sul grande corpo di dottrina moderno della Magnetofluidodinamica (con particolare interesse per le onde magnetofluidodinamiche, per il "quarto stato di

aggregazione della materia", cioè per il plasma) e sui vortici in Magnetofluidodinamica, in particolare.

In proposito è ben nota la monumentale monografia scritta da Agostinelli per il Consiglio nazionale delle ricerche.

E dovremmo anche ricordare i lavori termoelastici e quelli riguardanti l'equazione di Schrödinger, cioè l'equazione fondamentale della Meccanica dei quanta nell'indirizzo ondulatorio. Dobbiamo, in ogni caso, tenere presente che le ricerche del nostro sono condotto con l'uso di profondi mezzi algoritmici, in una solitudine meditante che affronta le più gravi difficoltà e costruendo, ove necessario, algoritmi: come certe funzioni speciali. L'attività trattatistica del nostro è costituita soprattutto da una "Meccanica razionale" in due volumi edita da Zanichelli, da una "Fisica Matematica" pure edita da Zanichelli e da corsi di lezione vari, tenuti presso l'Università ed il Politecnico di Torino. Ma mi permetto di dire che una grossa "Meccanica analitica", mancante nella letteratura fisico-matematica italiana è già da tempo pronta per la stampa, su due volumi ma ha trovato finora difficoltà editoriali. lo voglio sperare che tali difficoltà possano, d'altra parte, essere superate e che l'opera stessa veda finalmente la luce.

L'attività didattica di Cataldo Agostinelli, dopo il periodo piemontese nella Scuola media, si è svolta per diversi lustri presso le Università di Modena, di Catania e di Torino, oltre che nel Politecnico di Torino e presso l'Accademia militare di Modena. Ho il dovere di ricordare che, in piena guerra, per assicurare completamente gli insegnamenti di cui era titolare, Cataldo Agostinelli ha attraversato, per due volte ogni settimana, lo stretto di Messina, viaggiando per migliaia di chilometri attraverso la penisola. Ho il preciso dovere di aggiungere che, appena dopo la guerra, il nostro maestro ha aiutato col suo alto prestigio, e svolgendovi con sacrificio insegnamenti, l'Università di Modena, favorendovi il completamento della Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali e dirigendovi il Seminario matematico con la relativa Rivista, tuttora ospitante lavori italiani ed esteri.

Concludendo, la meditazione si fa di nuovo urgente su quella creatura di luce che è la Scienza. Essa non è onnipotente né onniscente. Quella vera ha il senso profondo delle proprie difficoltà ed anche dei propri limiti, sente l'ardore e la necessità di un lavoro continuo, si alimenta di una bruciante passione.

La scienza autentica non è mai trionfante, tanto meno arrogante. Sa essere umile e cara ed è capace di rimeditare continuamente sui risultati conquistati, anche per correggerli.

Il progresso scientifico ha due caratteristiche essenziali fra le altre. E queste due vorrei sottolineare, riproponendole, per un momento alla mia stessa meditazione.

Anzitutto è simile a progressive ascese su osservatori sempre più alti alla ricerca di orizzonti di conoscenza più ampi, ma deve non perdere in intensità per l'allargarsi degli orizzonti; anzi deve rendere più profonde le proprie indagini: arduo problema del rigore scientifico.

Inoltre tale progresso scientifico appare molto più prossimo e analogo di quanto si potrebbe credere alla creazione artistica. Dallo stesso slancio creatore, dallo stesso fuoco nascono, in fondo, la "Divina commedia" – la grande poesia che è stata definita verticale, perché sale dagli abissi infernali fino al mistero trinitario – o la poesia, definita "orizzontale" di Shakespeare, che vive nello spettro sondato delle passioni dell'uomo.

Dallo stesso incanto e dalla stessa grande ispirazione nascono lo sguardo e il sorriso di Monna Lisa del Giocondo o le scultoree e vorrei dire sinfoniche immagini del "Giudizio universale" di Michelangelo. E' stato detto che Giovanni Sebastiano Bach fu sorpreso dalla moglie mentre piangeva nel comporre il corale finale della Passione secondo San Matteo. Sarà storicamente vero? Non importa. A me piace pensarlo. E' certo che talvolta l'artista piange, perché i fantasmi dell'arte gli si trasformano in una indicibile commozione, in sostanza in una irresistibile gioia. Ebbene: questo slancio creatore presiede anche, in maniera tecnicamente diversa, ma che è spiritualmente la stessa, alla ricerca di riposte conoscenze del mistero della natura o alla scoperta di una ardua proposizione matematica, che è ben spesso intuita dal grande ricercatore, prima ancora di essere dimostrata rigorosamente (si pensi per esempio, al teorema di Fourier sulla convergenza delle sue serie).

Questo slancio creatore impone, per la sua elaborazione, immensa dedizione e profondo sacrificio. Nell'arte il processo si profila come di comprensione più immediata e più facilmente generatore di commozione e di entusiasmo. Nella scienza è più duro e percorre vie irte di difficoltà, di arresti, di silenzi.

Noi abbiamo il dovere di batterci – dovere supremo e senza alternative – perché la scienza sia al servizio dell'uomo; perché la ricerca e il rispetto della verità siano un comandamento; perché la verità conosciuta non sia impugnata, perché la carità diventi un abbraccio e il dolore sia santificato; perché la vita sia rispettata come sacra. Infine, perché gli uomini tutti e quelli in particolare che non abbiano avuto ancora la gioia di sentire il messaggio che comunque si sprigiona dalla Verità,

anche non conosciuta, si liberino da quello che è il grande pericolo: l'essere immersi nella miseranda negazione di tutto.

Maestro,

anche per questo noi La ringraziamo: per il Suo esempio silenzioso e ammonitore. E, avvinti dal senso e dalla presenza di un dovere sacro, Le promettiamo di fare di tutto per imitare tale esempio.

SCRITTI

L'equazione di Boltzmann semidiscreta in domini illimitati

NICOLA BELLOMO e ROBERTO MONACO
Dipartimento di Matematica - Politecnico di Torino
Corso Duca degli Abruzzi 24 - 10129 Torino

The semi-discrete Boltzmann equation is a continuity equation for the one-particle distribution function for a diluite monoatomic gas for particles which can have only one velocity modulus, but all space directions.

This paper proposes a detailed analysis for such equation when the gas is not confined in a bounded domain. An analysis of the maxwellian state, the problem of the local existence of solutions, some particular global existence and an analysis on the velocities of compression waves is realized in this paper.

1. Introduzione

L'equazione di Boltzmann semidiscreta è un'equazione di continuità per la funzione di distribuzione ad una particella per un gas mono-atomico sufficientemente diluito in cui le particelle hanno velocità con un unico modulo, ovvero la velocità delle particelle può assumere tutte le direzioni ammissibili senza variare il modulo.

L'equazione semidiscreta è stata proposta, nel caso piano, da Cabannes [1] e generalizzata a miscele di gas ed al caso spaziale nei lavori [2, 3]. Un teorema di esistenza globale, per dati iniziali sufficientemente piccoli, è stato proposto nel lavoro [4] nel caso dell'equazione nel piano, mentre un'interessante generalizzazione del modello è stata proposta da Toscani [5], che ha incluso l'effetto di potenziali di interazione per le forze scambiate da coppie di particelle, nella costruzione dell'equazione semi-discreta.

In questo lavoro si considera l'equazione di Boltzmann semidiscreta nello spazio, secondo il modello proposto in [2], in domini illimitati e si studiano alcuni problemi ai limiti ed al valore iniziale.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R., con finanziamento parziale Ministero Pubblica Istruzione.

Più in dettaglio sul contenuto di questo lavoro, il secondo paragrafo descrive il modello matematico, il terzo analizza le soluzioni relative allo stato maxwelliano. Il quarto fornisce la formulazione matematica di due problemi relativi al modello matematico di cui al paragrafo 3; ovvero il problema di Cauchy ed il problema dell'onda di compressione unidimensionale. Tali problemi sono esaminati in dettaglio ai paragrafi 5 e 6. Segue una discussione sui risultati ottenuti e sui problemi aperti relativi all'equazione di Boltzmann semidiscreta in domini illimitati. E' opportuno anticipare, anche se la questione verrà ripresa nel paragrafo delle discussioni, che il paragrafo 5 pone l'accento sugli aspetti matematici dell'equazione, mentre il paragrafo 6 è più rivolto agli aspetti applicativi del modello meccanico. Con ciò si presume di fornire, sia pure per aspetti parziali, un ciclo organico:
– Analisi fisica del sistema
– Modello matematico
– Analisi matematica del modello
– Studio di problemi della meccanica.

2. Il modello matematico

Come già affermato nell'introduzione, l'equazione di Boltzmann semidiscreta spaziale [2] descrive l'evoluzione nello spazio e nel tempo del numero di particelle:

$$(1) \qquad N = N(\underset{\sim}{x}, \theta, \psi, t) : \mathbb{R}^3 \oplus [0, 2\pi) \oplus [0, \pi) \oplus I \to \mathbb{R}_+$$

la cui velocità $\vec{c} = \vec{c}(\theta, \psi)$ al punto x ed all'istante $t \in I$ ha direzione θ e ψ rispetto ad una terna fissa $0\,(x_1, x_2, x_3)$ essendo θ l'angolo azimutale e ψ quello polare individuanti, come detto, la direzione di $\vec{c}$.

Tale equazione è scritta, nel modello considerato in questo lavoro, nella forma seguente:

$$(2) \qquad N = N(\underset{\sim}{x}, \theta, \psi, t)\ ; \quad \frac{\partial N}{\partial t} + \vec{c} \cdot \underset{\sim}{\nabla} N = Q(N, N) - NR(N)$$

dove:

$$(3) \qquad \vec{c} = \vec{c}\,(\sin\psi \cos\theta\, \vec{i}_1 + \sin\psi \sin\theta\, \vec{i}_2 + \cos\psi\, \vec{i}_3)$$

$$Q = Q(\underset{\sim}{x}, t) = \tag{4}$$
$$= \frac{2cS}{4\pi} \int_C N(\underset{\sim}{x}, t, \alpha, \beta) N(\underset{\sim}{x}, t, \alpha + \pi, \pi - \beta) \sin\beta \, d\alpha \, d\beta$$

$$R = R(\underset{\sim}{x}, \theta, \psi, t) = 2cSN(\underset{\sim}{x}, t, \theta + \pi, \pi - \psi) \tag{5}$$

$$C = D_\alpha \oplus D_\beta = [0, 2\pi) \oplus [0, \pi) \tag{6}$$

dove S è la sezione efficace d'urto delle particelle e dove α e β sono gli angoli di scattering delle particelle riflesse dopo la collisione testa a testa con sparpagliamento equiprobabile in tutte le direzioni sferiche.

Se la funzione $N = N(\underset{\sim}{x}, \theta, \psi, t)$ è nota, è possibile il calcolo delle grandezze macroscopiche, in ogni punto ed in ogni istante, effettuando opportuni momenti di N. Tali calcoli conducono, ad esempio, alla determinazione della densità di massa $n = n(\underset{\sim}{x}, t)$, della velocità di massa $u = u(\underset{\sim}{x}, t)$ e della temperatura $T = T(\underset{\sim}{x}, t)$ come segue:

$$n = n(\underset{\sim}{x}, t) = \int_C N(\underset{\sim}{x}, \theta, \psi, t) \, d\theta \, d\psi \tag{7}$$

$$\vec{u} = \vec{u}(\underset{\sim}{x}, t) = \frac{1}{n(\underset{\sim}{x}, t)} \int_C \vec{c}(\theta, \psi) N(\underset{\sim}{x}, \theta, \psi, t) \, d\theta \, d\psi \tag{8}$$

$$T = T(\underset{\sim}{x}, t) = \tag{9}$$
$$= \frac{1}{3k/m \, n(\underset{\sim}{x}, t)} \int_C [\vec{c} - \vec{u}(\underset{\sim}{x}, t)]^2 N(\underset{\sim}{x}, \theta, \psi, t) \, d\theta \, d\psi =$$
$$= \frac{m}{3k} [\vec{c}^{\,2} - \vec{u}^{\,2}(\underset{\sim}{x}, t)]$$

dove m è la massa della molecola di gas e k la costante di Boltzmann.

3. Studio dell'equazione Q (N, N) − NR (N) = 0

In analogia alla teoria classica dell'equazione di Boltzmann [6] possiamo definire "invariante collisionale" una quantità fisica che gode di proprietà di invarianza nella collisione. Pertanto, tenendo conto del tipo

di collisioni che caratterizzano l'equazione semi-discreta, se la quantità "ξ" è un invariante collisionale, gode della seguente proprietà:

$$\xi(\theta, \psi) + \xi(\theta + \pi, \pi - \psi) = \xi(\alpha, \beta) + \xi(\alpha + \pi, \pi - \beta). \tag{10}$$

Pertanto, poiché nel modello in oggetto le molecole del gas hanno tutte eguale massa e velocità con eguale modulo, quattro invarianti collisionali sono definiti come segue:

$$\xi_0 = 1, \quad \xi_1(\theta, \psi) = \sin\psi\cos\theta, \quad \xi_2(\theta, \psi) = \sin\psi\sin\theta\,, \quad \xi_3(\psi) = \cos\psi\,. \tag{11}$$

E' evidente che ξ_0 si riferisce alla conservazione della massa, mentre $\xi_{1,2,3}$ si riferiscono alle componenti della velocità di ciascuna particella e quindi alla conservazione della quantità di moto. La conservazione dell'energia è una conseguenza. Ovviamente una qualunque combinazione lineare degli invarianti collisionali è, a sua volta, un invariante collisionale.

Sempre in analogia alla teoria classica dell'equazione di Boltzmann [6], il teorema H stabilisce che condizione necessaria e sufficiente a definire l'equilibrio termodinamico del sistema è che la funzione "$\log N$" sia un invariante collisionale. Pertanto in condizioni di equilibrio:

$$\log N = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i(\underset{\sim}{x}, t)\,\xi_i \tag{12}$$

ovvero, omettendo negli α_i la dipendenza da $\underset{\sim}{x}$ e t:

$$N(\theta, \psi, \alpha_i) = \exp(\alpha_0)\exp\{c(\alpha_1 \sin\psi\cos\theta + \alpha_2 \sin\psi\sin\theta + \alpha_3 \cos\psi)\}\,. \tag{13}$$

Inoltre, se le costanti sono caratterizzate in modo che la funzione N esprime le grandezze macroscopiche, come indicato nelle definizioni (7-9), si perviene alle seguenti espressioni dei coefficienti α_i:

$$\alpha_0(\underset{\sim}{x}, t) = \log \frac{n(\underset{\sim}{x}, t)}{\{(2/3)\pi(c^2 - u^2(\underset{\sim}{x}, t))\}^{3/2}} - \frac{c^2 + u^2(\underset{\sim}{x}, t)}{(2/3)(c^2 - u^2(\underset{\sim}{x}, t))} \tag{14}$$

$$\alpha_{1,2,3}(\underset{\sim}{x}, t) = 3\, c\, u_{1,2,3}(x, t)/(c^2 - u^2(\underset{\sim}{x}, t)) \tag{15}$$

e quindi l'espressione di N diventa:

$$N(\underset{\sim}{x}, t, \theta, \psi) = \frac{n(\underset{\sim}{x}, t)}{(2\pi k/m\, T(\underset{\sim}{x}, t))^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(\vec{c}(\theta, \psi) - \vec{u}(\underset{\sim}{x}, t))^2}{2\, k/m\, T(\underset{\sim}{x}, t)}\right\} \quad . \tag{16}$$

Tale espressione è soluzione dell'equazione di Boltzmann semidiscreta ed annulla sia il termine a destra che quello a sinistra del segno di eguale in tale equazione. La (16) consente inoltre di studiare il problema dell'espansione di un'onda radiale in un dominio illimitato. In particolare, tale problema può essere formulato come problema di Cauchy per la (2) con le seguenti condizioni iniziali:

$$N_0 = N(x, y, z; t = 0) = \exp\{-\alpha(x^2 + y^2 + z^2)\} \tag{17}$$

che definiscono la distribuzione di densità numerica di un gas concentrato nell'intorno dell'origine in una porzione limitata dello spazio fisico in equilibrio termodinamico locale con velocità di massa nulla. Il confronto con le (13-16) indica che tale distribuzione è di tipo maxwelliano.

Come può essere facilmente verificato, la (2) con condizione iniziale (17) ammette soluzione del tipo:

$$N(\underset{\sim}{x}, t, \theta, \psi) = \exp(-\alpha((x - ct \sin\psi \cos\theta)^2 + (y - ct \sin\psi \sin\theta)^2 + (z - ct \cos\psi)^2)) \tag{18}$$

da cui con semplici calcoli:

$$N(\underset{\sim}{x}, t, \theta, \psi) = \exp(-\alpha((x^2 + c^2 t^2) + (y^2 + c^2 t^2) + (z^2 + c^2 t^2))) \cdot \exp(2\alpha ct(x \sin\psi \cos\theta + y \sin\psi \sin\theta + z \cos\psi)) \quad . \tag{19}$$

Tale espressione, confrontata ancora con le (13-16), risulta essere una

distribuzione di densità di tipo maxwelliano con velocità di massa localmente diversa da zero e con densità numerica $n(\underset{\sim}{x}, t)$ tendente a zero sia nello spazio che nel tempo, per $\underset{\sim}{x}, t \to \infty$.

La (18) consente, sulla base delle definizioni (7-9) il calcolo delle grandezze macroscopiche caratterizzanti lo stato termodinamico, nello spazio e nel tempo, del gas. In particolare, poiché il flusso descritto dalla (18) è di tipo radiale, è utile ricorrere ad una rappresentazione in coordinate polari. Ciò è equivalente a porre, nella (18):

$$y = z = 0, \qquad x = r \quad . \tag{20}$$

In particolare, per quanto riguarda la densità numerica "n", la velocità di massa radiale "u" e la temperatura "T", si ottengono i seguenti risultati:

$$n(r, t) = \exp(-\alpha c^2 t^2)\, I_0^2(\alpha rct)\, n_0(r) \tag{21}$$

$$u(r, t) = 4\pi \exp(-\alpha(r^2 + c^2 t^2))(sh^2(\alpha rct)/(\alpha rt)) \tag{22}$$

$$T(r, t) = (1 - (4\pi \exp(-(r^2 + c^2 t^2))(sh^2(\alpha rct)/(\alpha rct)))^2\, T_0(r). \tag{23}$$

Dove n_0 e T_0 rappresentano la distribuzione di densità numerica e di temperatura all'istante iniziale e dove I_n rappresenta la funzione di Bessel modificata di ordine 'n' [7, 8]. Nei calcoli delle (21-23) sono state utilizzate le seguenti relazioni fra funzioni di Bessel modificate:

$$\int_0^\pi I_0(2\zeta \sin\phi)\, d\phi = \pi I_0^2(\zeta) \tag{24}$$

$$\int_0^\pi I_1(2\zeta \sin\phi) \sin\phi\, d\phi = 2sh^2(\zeta)/\zeta \quad . \tag{25}$$

4. Sulla formulazione matematica di alcuni problemi di evoluzione in domini illimitati

In questo paragrafo verrà fornita la formulazione matematica relativa allo studio di problemi particolari di evoluzione per l'Eq. (2) in domini illimitati, per ciascuno dei quali, nei paragrafi successivi, si daranno ri-

sultati. Più in dettaglio verrà fornita la formulazione matematica per i seguenti due problemi:
a) Problema al valor iniziale;
b) Studio di onde di compressione in dimensione uno.

Problema (a):
lo studio del problema al valor iniziale per l'Eq. (2) consiste nell'analisi della evoluzione nello spazio e nel tempo della funzione $N=N(x, \theta, \psi, t)$, secondo la (2), ed assegnate condizioni iniziali:

$$N_0 = N(\underset{\sim}{x}, \theta, \psi, t=0) \quad . \tag{26}$$

L'analisi del paragrafo successivo si riferirà alle soluzioni di tipo "mild" ovvero relative alla scrittura integrale dell'equazione in oggetto. In particolare tale scrittura integrale può essere posta nella forma:

$$\begin{aligned} N(\underset{\sim}{x}, \theta, \psi, t) = {} & N_0(\underset{\sim}{x} - \vec{c}t, \theta, \psi, t=0) + \\ & + \int_0^t Q(\underset{\sim}{x} - \vec{c}(t-s), \theta, \psi, s)\, ds + \\ & - \int_0^t N(\underset{\sim}{x} - \vec{c}(t-s), \theta, \psi, s) \\ & \quad R(\underset{\sim}{x} - \vec{c}(t-s), \theta, \psi, s)\, ds \quad . \end{aligned} \tag{27}$$

Con riferimento alla Eq. (27) è ora possibile introdurre un opportuno spazio di funzioni e fornire una più rigorosa definizione di soluzione. Allo scopo indicheremo con:

$$\widetilde{C}_b\,(\mathbb{R}^3 \oplus [0, 2\pi) \oplus [0, \pi)) = \widetilde{C}_b\,(\mathbb{R}^3 \oplus C) \tag{28}$$

l'insieme delle funzioni reali continue e limitate di $(\underset{\sim}{x}, \theta, \psi)$ prolungate con periodo 2π rispetto a θ e con periodo π rispetto a ψ, che tendono a zero quando $\underset{\sim}{x}$ tende ad infinito; e sia inoltre:

$$\mathrm{B}_T\,(C^0\,[0, T);\ \widetilde{C}_b\,(\mathbb{R}^3 \oplus C)) \tag{29}$$

lo spazio di Banach la cui norma è definita da:

$$\|N\| = \sup_{\substack{\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^3,\ \theta \in [0, 2\pi),\ \psi \in [0, \pi) \\ t \in [0, T)}} |N(\underset{\sim}{x}, \theta, \psi, t)| \quad . \tag{30}$$

Dopo questa premessa è possibile fornire la seguente definizione di soluzione:

Definizione: una funzione $N = N(\underset{\sim}{x}, \theta, \psi, t)$ si definisce soluzione "mild" del problema relativo all'Eq. (2) se: $0 \leqslant N_0 \in \widetilde{C}_b$ e se N soddisfa la (27) per ogni $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^3$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\psi \in [0, \pi)$, $t \in [0, T)$ con:

$$0 \leqslant N(\underset{\sim}{x}, \theta, \psi, t) \in \mathbf{B}_T \; .$$

Inoltre se $T \to \infty$ la soluzione si definisce globale.

Una analisi di questo problema, secondo le definizioni appena proposte, verrà fornita al paragrafo 5.

Problema (B):
lo studio del problema della propagazione unidimensionale di onde di compressione può essere effettuato determinando le soluzioni dell'Eq. (2) associate ad opportune condizioni ai limiti per $x_1 \to -\infty$ e per $x_1 \to +\infty$. In particolare si assume che per $x_1 \to -\infty$ la N sia una densità di tipo maxwelliano con velocità di massa $\vec{u} \neq 0$ e che per $x_1 \to +\infty$ la N sia una densità di tipo maxwelliano con velocità di massa nulla. Formalmente il problema può essere scritto come segue:

$$\text{(31a)} \qquad x_1 = x, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot = \frac{\partial}{\partial x_3} \cdot = 0 \;, \; N = N(x, \theta, \psi, t)$$

$$\text{(31b)} \qquad \frac{\partial N}{\partial t} + c \sin\psi \cos\theta \, \frac{\partial N}{\partial x} = Q(N, N) - NR(N)$$

$$\text{(31c)} \qquad N(\theta, \psi, t; x \to -\infty) = N_0(\theta, \psi)$$

$$\text{(31d)} \qquad N(\theta, \psi, t; x \to +\infty) = N_\infty = \text{cost}$$

con N_0 funzione opportuna di θ e ψ di tipo maxwelliano e N_∞ costante.

Lo studio del problema in oggetto consiste quindi nell'analisi delle equazioni (31) con i seguenti obiettivi:

– analisi dell'esistenza d velocità di propagazione $\vec{w}$ costante ed in direzione dell'asse x tale che le (31c-d) siano soddisfatte e che la soluzione della (31b) risulti invariante rispetto a t per un osservatore che si muova con velocità $\vec{w}$;

– determinazione delle soluzioni regolari della (31b) nelle condizioni definite, se esistono, al punto precedente.

Una analisi del problema ora descritto, limitatamente al primo punto, sarà effettuata al paragrafo 6.

5. Il problema di Cauchy in domini illimitati

Il problema di Cauchy matematicamente descritto al punto (a) del paragrafo 4 è stato affrontato, per quanto riguarda l'equazione di Boltzmann semidiscreta nel piano, nel lavoro [4] in cui è stato proposto un teorema di esistenza globale ottenuto per opportuna applicazione dello "schema iterativo" di Kaniel e Shinbrot [9] per dati iniziali piccoli rispetto al vuoto. Inoltre Toscani [5] ha fornito risultati di esistenza globale per il modello, da lui stesso proposto, di equazione semidiscreta con interazione del tipo "sfere rigide". Il risultato di Toscani è stato ottenuto mediante opportuna applicazione del teorema di punto fisso in spazi di Banach secondo la stessa metodologia, che ha consentito di ottenere teoremi di esistenza, unicità e comportamento asintotico per l'equazione di Boltzmann completa [10, 11].

In questo paragrafo, senza entrare in eccessivi dettagli di calcolo per i quali si rinvia ai lavori [4, 10, 11] già citati, si indicherà come è possibile ottenere un teorema di esistenza globale per condizioni iniziali assegnate nella forma:

$$(32) \qquad 0 \leqslant N_0\,(\underset{\sim}{x}, \theta, \psi) = a_r\, f(\theta, \psi)\, e^{-r^2 \underset{\sim}{x}^2} \in \widetilde{C}_b\ (\mathbb{R}^3 \oplus C)$$

$$0 \leqslant f(\theta, \psi) \quad , \quad 0 \leqslant a_r$$

a seguito di opportune ipotesi di piccolezza del coefficiente a_r.

Lo schema della dimostrazione è il seguente:

i) si dimostra un teorema di esistenza ed unicità locale nello spazio di Banach B_T definito in (29) per soluzioni positive.

ii) Si considera l'equazione agli operatori troncata al termine di guadagno:

$$(33) \qquad N(\underset{\sim}{x}, \theta, \psi, t) = B(N)(\underset{\sim}{x}, \theta, \psi, t)$$

con

$$(34) \qquad B(N)(\cdot) = N_0(\underset{\sim}{x} - \vec{c}t, \theta, \psi) + \int_0^t Q(\underset{\sim}{x} - \vec{c}(t-s), \theta, \psi, s)\, ds$$

(tale troncamento è consentito a seguito della dimostrazione di positività delle soluzioni) e si dimostra che l'operatore B è un operatore contrattivo su un insieme chiuso e convesso di $\mathbf{B}_T$ a seguito di opportune ipotesi di piccolezza su a_r.

Per quanto riguarda il punto (i) non è necessario effettuare nuove dimostrazioni; infatti seguendo la stessa linea del lavoro [4] è possibile far vedere che la soluzione è unica e positiva in un intervallo di tempo limitato $[0, T]$ con T inversamente proporzionale alla norma dei dati iniziali:

$$(35) \qquad T \propto 1/\|N_0\| \quad , \quad \|N_0\| = a_r \|f\| = a_r \sup_{\theta, \psi \in C} \{f\} \quad ;$$

per dimostrare quanto ora affermato è sufficiente considerare il sottoinsieme chiuso e convesso $\mathbf{D}_T$ di $\mathbf{B}_T$ definito come segue:

$$(36) \qquad \mathbf{D}_T = \{N^\lambda \in \mathbf{B}_T \ : \|N^\lambda\| \leqslant 2\, \|N_0\|\}$$

per le funzioni:

$$(37) \qquad N^\lambda(\cdot) = e^{\lambda t} N(\cdot)$$

le quali soddisfano le equazioni agli operatori:

$$(38) \qquad N^\lambda = G_\lambda(N^\lambda) = N_0 + \int_0^t F_\lambda(\cdot)\, ds$$

dove:

$$(39) \qquad F_\lambda = N^\lambda(\lambda - R(N_\lambda)) + e^{-\lambda t} Q(N^\lambda, N^\lambda)$$

e dove nelle (37-39) sono stati omessi, per brevità gli argomenti delle funzioni; quindi nei calcoli del tutto analoghi a quelli del lavoro [4] si dimostra che per $\lambda = 8\, cS\, \|N_0\|$ valgono le seguenti proprietà:

a) $\qquad N^\lambda \in \mathbf{D}_T : F_\lambda \geqslant 0 \quad , \quad G_\lambda N^\lambda \geqslant 0$

b) $N^\lambda \in \mathbf{D}_T : \|G_\lambda N^\lambda\| \leqslant 2 \|N_0\|$

c) $N^\lambda, M^\lambda \in \mathbf{D}_T : \|G_\lambda N^\lambda - G_\lambda M^\lambda\| < \|N^\lambda - M^\lambda\|$

da cui, per applicazione del teorema di punto fisso, l'unicità e positività della soluzione N^λ della (38) e quindi della soluzione N della (27).

Per quanto riguarda il punto (ii) l'esistenza e unicità globale dell'Eq. (33) e quindi, a seguito della dimostrazione di positività locale, della (27) è conseguenza diretta delle seguenti proprietà dell'operatore B definito in (34):

Prop. 1: *se le condizioni iniziali sono assegnate nella forma (32) con:*

$$\|f\| \leqslant F < \infty$$

esiste una costante C_1 inversamente proporzionale a c tale che per

$$r > C_1$$

l'operatore B definisce un'applicazione da $\mathbf{D}_T$ in se stesso.

Prop. 2: *$N, M \in \mathbf{D}_T$ e per condizioni iniziali assegnate nella forma (32) esistono delle costanti C_1 e C_2 tali che per:*

$$r > C_1 \qquad e \qquad a_r < C_2 \propto r/F$$

l'operatore B risulta contrattivo su $\mathbf{D}_T$, cioè

$$\|BN - BM\| < \|N - M\| \, . \tag{40}$$

La dimostrazione della proprietà (1) si esegue sostituendo la (32) nella (33), effettuando i calcoli relativi ed imponendo infine:

$$\|BN\| \leqslant 2 \|N_0\| \quad ;$$

ciò è verificato per un decadimento sufficientemente rapido su r.

La dimostrazione della proprietà (2) si effettua invece tenendo conto che:

$$|BN-BM| \leqslant \int_0^t \int_C \{N\,|N-M| + M\,|N-M|\}\,(\,\cdot\,)\,d\alpha d\beta ds \leqslant$$

$$\leqslant \|N-M\| \int_0^t \int_C |(N+M)(\,\cdot\,)|\,d\alpha d\beta ds$$

e quindi sostituendo ancora una volta la (32) nel termine a destra del segno di disequazione ed effettuando i calcoli si dimostra la condizione (40) a seguito di opportune ipotesi di piccolezza su a_r (dati iniziali vicini al vuoto).

Come già affermato le due proprietà contengono, per applicazione del teorema di punto fisso di Caccioppoli-Banach, il risultato di esistenza globale delle soluzioni del problema di Cauchy.

6. Analisi del problema della propagazione di onde unidimensionali

Il problema di propagazione di onde di compressione la cui formulazione matematica è stata proposta al punto (b) del paragrafo (4) costituisce uno dei problemi fondamentali della fluidodinamica molecolare sul quale esiste ovviamente una vasta bibliografia. Possiamo in tal senso fare riferimento al "review paper" di Fiszdon e collaboratori [12] per quanto riguarda questo studio eseguito mediante l'equazione di Boltzmann completa o ai lavori [13, 14] per quanto riguarda lo studio analogo eseguito mediante modelli alle discrete velocità dell'equazione di Boltzmann.

In questo paragrafo proporremo una semplice analisi del problema sulla base della quale sarà possibile far vedere come il problema formulato al punto (b) non risulta ben posto. Tale dimostrazione si basa sulla analisi di alcune proprietà dell'operatore di collisione dell'equazione di Boltzmann semidiscreta, che consentono di porre in evidenza come le condizioni ai limiti specificate alle (31c, d), ovvero distribuzione maxwelliana con velocità di insieme a monte dell'onda di compressione e distribuzione maxwelliana con velocità d'insieme nulla a valle di questa, risultano incompatibili con l'integrazione dell'equazione di Boltzmann semidiscreta.

Supponiamo pertanto che esista una velocità costante $\vec{w} = w\vec{i}$ in direzione dell'asse x ed effettuiamo il seguente cambio di variabile:

$$z = x + wt = c\,(x/c + bt) \qquad , \qquad b = w/c$$

a seguito della quale l'equazione in oggetto può essere scritta nella forma seguente:

$$(b+\sin\psi\cos\theta)\frac{dN}{dz}(z;\psi,\theta)=J(N,N)(z;\psi,\theta)=$$
$$=\frac{1}{c}[Q(N,N)-NR(N)](z;\psi,\theta)$$

dove l'operatore collisionale J soddisfa le seguenti proprietà:

i) $$\int_C J(z;\psi,\theta)\,d\psi d\theta=0$$

ii) $$\forall\psi,\theta\in C\ :\ J(z;\psi,\theta)=J(z;\pi-\psi,\theta+\pi)\ .$$

Le due proprietà conducono alle seguenti equazioni differenziali:

$$b\frac{d}{dz}\int_C N(z;\psi,\theta)\,d\psi d\theta+$$
$$+\frac{d}{dz}\int_C N(z;\psi,\theta)\sin\psi\cos\theta\,d\psi d\theta=0$$

$$(b+\sin\psi\cos\theta)\frac{dN}{dz}(z;\psi,\theta)-$$
$$-(b-\sin\psi\cos\theta)\frac{dN}{dz}(z;\pi-\psi,\theta+\pi)=0$$

dove il primo integrale nella prima equazione rappresenta la densità numerica $n(z)$, mentre il secondo integrale definisce la velocità di massa $u(z)$, in direzione dell'asse x moltiplicata per $n(z)/c$. Tali equazioni sono omogenee e possono essere integrate con condizioni ai limiti a monte dell'onda di compressione, $N_0(\psi,\theta)$, ed a valle di questa, N_∞, con il seguente risultato:

(41a) $$b(n_0-n_\infty)+n_0(u_0/c)=0$$

(41b) $$(b + \sin\psi \cos\theta)(N_0(\psi, \theta) - N_\infty) =$$
$$= (b - \sin\psi \cos\theta)(N_0(\pi - \psi, \theta + \pi) - N_\infty) \ .$$

La prima delle due equazioni fornisce il calcolo di b per note condizioni ai limiti:

$$b = \frac{u_0/c}{n_\infty/n_0 - 1} = \frac{\epsilon}{\delta - 1}$$

mentre la seconda equazione, che deve essere soddisfatta per ogni θ e ψ, risulta verificata se N_0 è definita dalla seguente espressione:

$$N_0(\psi, \theta) = a_1 + a_2 \sin\psi \cos\theta$$

dove le costanti a_1 e a_2 sono riconducibili (si vedano le Eq. (7, 8)) alla densità n_0 ed alla velocità di massa u_0 con il seguente risultato:

(42) $$N_0(\psi, \theta) = \frac{n_0}{2\pi^2}[1 + 4(u_0/c)\sin\psi \cos\theta] \ .$$

La (42) non risulta pertanto una distribuzione maxwelliana; infatti non è soluzione dell'equazione $Q(N, N) - NR(N) = 0$, e pertanto non è coerente alla formulazione matematica del problema. Quindi come affermato all'inizio del paragrafo il problema non risulta ben posto. Inoltre dalle Eq. (41) la densità N_∞ risulta definita dalla condizione N_0, mentre l'analisi prima sviluppata la indica come parametro libero.

Vale tuttavia la pena di osservare che per onde d'urto deboli, tali che il parametro adimensionale $\epsilon = u_0/c$ risulti sufficientemente piccolo rispetto all'unità in modo che le potenze di ϵ siano trascurabili per $n \geqslant 2$, allora la (42) definisce una distribuzione maxwelliana a meno di termini ϵ^n con $n \geqslant 2$. Infatti la (42) rappresenta lo sviluppo in serie di McLaurin della distribuzione maxelliana (definita dall'Eq. (13)) nell'intorno di $\epsilon = 0$. Inoltre:

(43) $$Q(N_0, N_0) - N_0 R(N_0) \propto \epsilon^2 \ .$$

Pertanto il problema può essere ancora studiato nell'ambito dell'approssimazione indicata nella (43).

Il problema ora posto non è studiato in questo lavoro; tuttavia è possibile, a completamento dell'analisi sviluppata, eseguire il calcolo esplicito di b ed N_∞ nell'ambito dell'approssimazione (43). Infatti sostituendo la (42) nelle (41) si ottiene, con semplici calcoli, il seguente risultato:

$$(44) \qquad b = 1/2 \qquad , \qquad N_\infty = (n_0/2\pi^2)(2\epsilon + 1).$$

7. Discussione

Questo lavoro si pone lo scopo di proporre una analisi critica del modello alle velocità semidiscrete dell'equazione di Boltzmann descritto nei primi due paragrafi del lavoro stesso.

Il modello presenta un suo interesse che deriva essenzialmente dal possedere una struttura matematica indubbiamente più semplice della equazione di Boltzmann completa pur conservando proprietà di descrizione delle interazioni molecolari a questa simili. In altre parole, il modello si presenta come generalizzazione più ampia dei modelli alle discrete velocità di tipo regolare, ovvero con un solo modulo di velocità.

L'analisi, essenzialmente rivolta alle applicazioni del modello matematico per lo studio di problemi in domini illimitati, ha tuttavia evidenziato alcuni limiti del modello stesso. Infatti dopo aver studiato il problema, relativamente semplice, di determinare le soluzioni dell'equazione in oggetto per le quali l'operatore di collisione risulta uniformemente eguale a zero, e dopo aver indicato come per tale equazione è costruibile, con opportune ipotesi sulle condizioni iniziali, un teorema di esistenza globale delle soluzioni del problema di Cauchy, l'analisi stessa ha individuato limiti precisi circa l'applicabilità del modello allo studio di problemi di propagazione di onde d'urto.

Tali limiti sono stati evidenziati al paragrafo 6 ove si è posto in evidenza come il modello possa di fatto studiare solo onde di compressione deboli, ovvero per rapporti n_∞/n_0 molto prossimi all'unità. Per questo risultato è possibile fornire una interpretazione fisica: infatti tale limite è dovuto essenzialmente al fatto che il modello presenta un solo modulo di velocità e quindi la temperatura non è una variabile indipendente. In altre parole, il modello si presenta idoneo a descrivere solo situazioni fisiche di piccola perturbazione.

In tal senso la (44) costituisce un risultato relativo alla propagazione di piccole perturbazioni. Inoltre si può formulare la congettura che i limiti ora esposti possano essere superati costruendo analoghi modelli con più moduli di velocità.

BIBLIOGRAFIA

[1] CABANNES H. - in *Mathematical Methods in the Kinetic Theory of Gases*, H. Neunzert & D. Pack eds., D. Lang Verlag, Frankfurt, (1979), 25-44.

[2] BELLOMO N. e MONACO, in *Application of mathematics to Technology*, V. Boffi & H. Neunzert eds. Teubner, Stuggart, (1984) 396-412.

[3] BELLOMO N., in *Atti del Convegno «Onde e Stabilità nei Continui»*, Ed. A. Anile, C. Cattaneo, P. Pantano, Quaderni CNR-GNFM, Catania (1986) 9-34.

[4] BELLOMO N., ILLNER R. e TOSCANI G. - Comp. Rendus Acad. Science Paris, t. 299, I, n. 16, (1984) 835-838.

[5] TOSCANI G. - *Meccanica*, 20 (1985) 239-251

[6] KOGAN M. - *Rarefied Gas Dynamics*, Plenum, New York, (1969).

[7] AGOSTINELLI C. - *Lezioni sulla Conduzione del Calore*, Ed. Viretto, Torino (1950).

[8] GRADSHTEYN I. e RYZHIK I. - *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York, (1980).

[9] KANIEL S. and SHINBROT, Comm. Math. Phys. 58 (1978) 65-84.

[10] BELLOMO N. e TOSCANI G., J. Math. Phys., 2, 26, (1985) 334-338.

[11] TOSCANI G. e BELLOMO N. - *Atti del convegno centenario del circolo matematico di Palermo*, in Stampa.

[12] FISZDON W., HERCZYNSKY R. e WALENTA Z. - in *Rarefied Gas Dynamics*, M. Becker and M. Fiebig eds., DFVLR Press, Porz-Wahn, (1974), B.23.

[13] CABANNES H., J. Mécanique, 14(1975) 705-744.

[14] MONACO R. - *Acta Mechanica*, 55 (1985) 239-251

Sulla formulazione hamiltoniana della meccanica dei sistemi con vincoli non-olonomi

SERGIO BENENTI e GIORGIO PIDELLO
Istituto di Fisica Matematica «J.-Louis Lagrange»
Università di Torino
Via Carlo Alberto 10 - 10123 Torino

Sommario. *Considerato per semplicità il caso di un sistema scleronomo soggetto a vincoli lineari di velocità si dimostra che la parte integrabile delle equazioni di Hamilton coincide con la restrizione di un opportuno campo vettoriale ad una sottovarietà dello spazio delle fasi. Si ottiene così un sistema di equazioni del primo ordine in forma normale privo di moltiplicatori. L'interpretazione geometrica di queste equazioni fornisce un metodo di Hamilton-Jacobi valido per una particolare classe di sistemi anolonomi. La generalizzazione al caso di vincoli non lineari è immediata.*

Abstract. *A Hamiltonian system with time-independent non-holonomic constraints is considered. The constraints are assumed to be linear in the Lagrangian velocities. The integrable part of Hamilton equations is proved to be the restriction of a suitable vector field to a submanifold of the phase space. A system of first order equations in normal form and without multipliers is thus obtained. The geometrical interpretation of these equations provides a Hamilton-Jacobi method for a class of non-holonomic systems. The same results hold in the case of nonlinear constraints.*

Ad un sistema olonomo di hamiltoniana $H(q^i, p_i)$ siano imposti dei vincoli indipendenti dal tempo e lineari nelle velocità lagrangiane (in generale non integrabili), caratterizzati localmente da equazioni del tipo

$$(1) \qquad K_i^a\,(q^j)\,\dot{q}^i = 0 \qquad (a = 1, ..., l\ ;\ i = 1, ..., n;\ l < n)$$

tali che in ogni punto la matrice di funzioni (K_i^a) abbia rango massimo. Ciò significa che le 1-forme $K^a = K_i^a\, dq^i$ sono indipendenti. Il moto del sistema è retto, oltre che dai vincoli, dalle seguenti equazioni di Hamil-

ton con moltiplicatori (λ_a):

(2) $$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + \lambda_a K_i^a \ .$$

Introduciamo per brevità le seguenti notazioni: $H_i = \dfrac{\partial H}{\partial q^i}$,

$$H^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \, , \; H^{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \, \partial p_j} \; , \; H_j^i = \frac{\partial^2 H}{\partial q^j \, \partial p_i} \, , \; K_{ij}^a = \frac{\partial K_i^a}{\partial q^j} \, .$$

TEOREMA. Se l'hamiltoniana H verifica la condizione $\det(H^{ij}) \neq 0$ e la matrice simmetrica

(3) $$M^{ab} = K_i^a \, K_j^b \, H^{ij}$$

è regolare, allora, introdotte le funzioni

(4) $$N^a = K_i^a \, (H^{ij} H_j - H_j^i H^j) - K_{ij}^a H^i H^j$$

e denotata con (L_{ab}) la matrice inversa di (M^{ab}), segue che il campo vettoriale sullo spazio delle fasi $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial q^i} + X_i \dfrac{\partial}{\partial p_i}$ definito dalle uguaglianze

(5) $$X^i = H^i \quad , \quad X_i = -H_i + L_{ab} N^a K_i^b$$

è tangente alla sottovarietà S dello spazio delle fasi definita dalle l equazioni

(6) $$K_i^a \, H^i = 0 \, .$$

I moti del sistema sono tutte e sole le curve integrali del campo X ristretto a S, cioè le soluzioni del sistema

(7) $$\frac{dq^i}{dt} = X^i \quad , \quad \frac{dp_i}{dt} = X_i$$

con condizioni iniziali soddisfacenti alle (6).

Dimostrazione. - Si considerino i differenziali delle funzioni S^a a primo membro delle (6):

$$dS^a = (K^a_{ij} H^i + K^a_i H^i_j)\, dq^j + K^a_i H^{ij}\, dp_j \ .$$

Osserviamo che questi differenziali sono indipendenti in quanto la matrice (K^a_i) ha rango massimo e la matrice (H^{ij}) è regolare. Dunque le equazioni (6) definiscono una sottovarietà. Consideriamo le derivate delle funzioni S^a rispetto al campo vettoriale X:

$$
\begin{aligned}
(8) \qquad \langle X, dS^a \rangle &= (K^a_{ij} H^i + K^a_i H^i_j) X^j + K^a_i H^{ij} X_j \\
&= (K^a_{ij} H^i + K^a_i H^i_j) H^j + K^a_i H^{ij} (-H_j + L_{bc} N^b K^c_j) \\
&= -N^a + M^{ac} L_{bc} N^b \\
&= -N^a + \delta^a_b N^b \\
&= 0 \ .
\end{aligned}
$$

L'annullarsi di queste derivate equivale alla tangenza di X a S. Dunque le soluzioni del sistema (7) con condizioni iniziali su S sono curve sopra S. Dal confronto tra la $(5)_1$, la (6) e la $(7)_1$ si osserva che in tal caso il vincolo (1) è sempre soddisfatto. Per tale soluzione la $(2)_1$ è inoltre sempre soddisfatta. Anche la $(2)_2$ è soddisfatta con

$$(9) \qquad \lambda_a = L_{ab} N^b \ .$$

Dunque le curve integrali del campo X ristretto a S soddisfano alle equazioni dinamiche (1) e (2). Viceversa, se un moto soddisfa alle (1)-(2) con opportuni moltiplicatori $\lambda_a(t)$, allora le equazioni (1) e $(2)_1$ implicano che esso si svolge sulla sottovarietà S. Le derivate totali rispetto al tempo delle funzioni S^a calcolate lungo una traiettoria dinamica sono pertanto identicamente nulle. Inserendo nelle identità così ottenute le espressioni di $\dot{q}^i$ e $\dot{p}_i$ fornite dalle (2) e risolvendo poi rispetto ai moltiplicatori, si verifica che la condizione (9) è identicamente soddisfatta durante il moto assegnato. Tale moto è quindi una curva integrale del campo X rispetto a S. (Q.E.D.)

Osservazioni

(a) - Le ipotesi del Teorema sono senz'altro verificate se, come sempre accade nel caso dei sistemi dinamici ordinari, la matrice (H^{ij}) associata alla hamiltoniana H è definita positiva. La matrice simmetrica (H^{ij}) può infatti essere interpretata, punto per punto, come matrice delle componenti di un tensore metrico contravariante definito positivo. La restri zione di tale tensore al sottospazio individuato dai covettori (K^a) è un tensore metrico definito positivo che ha componenti (M^{ab}) nella base costituita dai covettori (K^a) stessi. Di conseguenza la matrice simmetrica (M^{ab}) è definita positiva e quindi regolare.

(b) - Un metodo di eliminazione dei moltiplicatori dalle equazioni dinamiche dei sistemi con vincoli non-olonomi, in ambito lagrangiano, è stato sviluppato da Agostinelli in [1] e [2], anche per sistemi a vincoli dipendenti dal tempo. In tali lavori si rileva l'esistenza di l integrali primi lineari nelle velocità lagrangiane. I moti effettivi corrispondono al valore zero di tali integrali primi. Naturalmente, la formulazione hamiltoniana qui presentata si può esprimere anche in termini di integrali primi. In effetti, l'equazione (8) $\langle X, dS^a \rangle = 0$ mostra che le funzioni S^a a primo membro delle (6) sono integrali primi del campo X. I moti effettivi sono quelli per cui tali integrali hanno valore zero.

(c) - Un vincolo lineare nelle velocità lagrangiane, come qui considerato, è geometricamente rappresentato da un sottofibrato vettoriale del fibrato tangente alla varietà delle configurazioni. Nel caso dei sistemi dinamici lagrangiani normali le equazioni di Appell forniscono un sistema normale di $2n - l$ equazioni *pure*, cioè prive di moltiplicatori incogniti, interpretabili come equazioni del primo ordine associate ad un campo vettoriale definito su tale sottofibrato. Con il metodo hamiltoniano qui presentato si ottiene un sistema normale di $2n$ equazioni pure. Soltanto le curve integrali sulla sottovarietà S hanno significato fisico. Nel caso in cui l'hamiltoniana è quadratica nei momenti, S è un sottofibrato vettoriale dello spazio delle fasi (che è il fibrato cotangente della varietà delle configurazioni); si ottiene pertanto una "formulazione hamiltoniana" delle equazioni di Appell.

(d) - Osserviamo che il campo vettoriale X soddifa all'equazione

$$i_X \omega = -dH + \theta \ ,$$

dove $\omega = dp_i \wedge dq^i$ è la forma simplettica canonica sullo spazio delle fasi e θ è la 1-forma sullo spazio delle fasi definita da:

$$\theta = L_{ab}\, N^a\, K_i^b\, dq^i \ .$$

In generale la 1-forma θ non è chiusa, per cui il campo vettoriale X non è localmente hamiltoniano e di conseguenza non è possibile applicare il metodo di Hamilton-Jacobi per la determinazione di tutte le curve integrali di X, in particolare di quelle ristrette a S. Se tuttavia esiste una sottovarietà A di S (potrebbe nei casi più fortunati essere proprio $A = S$) tale che il campo X è tangente ad A e la restrizione $\theta \,|A$ di θ ad A è una forma chiusa, allora esistono, almeno localmente, funzioni F su A tali che $dF = \theta\,|A$. Tali funzioni inoltre possono essere estese, almeno localmente, a funzioni $\bar{F}$ sullo spazio delle fasi. Il campo vettoriale $\bar{X}$ di hamiltoniana $\bar{H} = H + \bar{F}$ coincide con X su A. In questo caso è quindi possibile determinare i moti sopra A applicando il metodo di Hamilton-Jacobi a partire dalla hamiltoniana $\bar{H}$. Converrà esaminare nei dettagli le condizioni generali di chiusura della 1-forma θ, per poter stabilire la portata del metodo di Hamilton-Jacobi qui prospettato. Resta inoltre aperta la questione del confronto con altri metodi già apparsi in letteratura e della loro interpretazione geometrica (vedi per esempio [3] e [4]).

(e) - Il metodo di Hamilton-Jacobi di cui all'osservazione precedente è applicabile quando i vincoli sono integrabili (in accordo con l'intuizione). Le condizioni iniziali individuano infatti una sottovarietà C dello spazio delle configurazioni su cui si svolge il moto. Denotato con $\bar{C}$ il sottofibrato dello spazio delle fasi costituito dai covettori basati in punti di C, si verifica poi facilmente, in coordinate adattate a C, che il campo vettoriale X è tangente alla sottovarietà $A = S \cap \bar{C}$ e che la restrizione di θ ad A è identicamente nulla.

(f) - Denotato con L il sottoinsieme dello spazio delle fasi definito dalle equazioni

$$L_{ab}\, N^a = 0 \ , \qquad (10)$$

si verifica immediatamente che la forma θ è nulla nei punti di L.

Nei casi in cui $A = L \cap S$ è una sottovarietà dello spazio delle fasi e il campo vettoriale X è tangente ad A, allora il metodo di Hamilton-Jacobi è applicabile per i moti che soddisfano alle equazioni (10). Sono

questi i moti per i quali i vincoli “non agiscono”, essendo, come si vede dalla (9), $\lambda_a = 0$.

(g) - Il teorema vale anche nel caso più generale di vincoli indipendenti dal tempo ma non necessariamente lineari nelle velocità lagrangiane. Vincoli di questo tipo sono caratterizzati localmente da equazioni

$$K^a(q^i, \dot{q}^i) = 0 \qquad (a = 1, \ldots, l\ ; i = 1, \ldots, n\ ; l < n)$$

tali che la matrice di funzioni $\left(\frac{\partial K^a}{\partial \dot{q}^i}\right)$ abbia rango massimo in ogni punto. Introdotte le notazioni $A_i^a(q^i, p_i) = \frac{\partial K^a}{\partial \dot{q}^i}(q^i, H^i(q^j, p_j))$ e $B_i^a(q^i, p_i) = \frac{\partial K^a}{\partial q^i}(q^i, H^i(q^j, p_j))$, si ottiene l'enunciato del teorema sostituendo semplicemente alle relazioni (3), (4), (6) le corrispondenti

$$(3') \qquad M^{ab} = A_i^a A_j^b H^{ij} ,$$

$$(4') \qquad N^a = A_i^a (H^{ij} H_j - H_j^i H^j) - B_i^a H^i ,$$

$$(6') \qquad K^a(q^i, H^i) = 0 .$$

La dimostrazione è identica.

BIBLIOGRAFIA

[1] AGOSTINELLI C. - *Nuova forma sintetica delle equazioni del moto di un sistema anolonomo ed esistenza di un integrale lineare nelle velocità lagrangiane*, Boll. Un. Mat. Ital., Serie III, Anno XI, N. 1, 1-9, 1956.

[2] AGOSTINELLI C. - *Nuove forme delle equazioni del moto di un sistema anolonomo*, Rend. Mat., Serie VI, Vol. 8, n. 1, 143-160, 1975.

[3] AGOSTINELLI C. - *Sull'applicabilità del metodo di Jacobi della meccanica analitica ai sistemi anolonomi*, Atti Acc. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., Serie VIII, Vol. VII, Fasc. 1-4, 93-99, 1949.

[4] RUMYANTSEV V.V., SUMBATOV A.S. - *On the problem of a generalization of the Hamilton-Jacobi method for nonholonomic systems,* Z. Angew, Math. Mech., 58, 477-481, 1987.

Lavoro svolto nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Sul problema del rallentamento continuo dei neutroni nel caso spazialmente non omogeneo

VINICIO BOFFI
Laboratorio di Ingegneria Nucleare dell'Università di Bologna

Sommario. *Si presentano elementi di un metodo analitico mirante alla costruzione esplicita della soluzione del classico problema del rallentamento continuo dei neutroni nel caso stazionario spazialmente non omogeneo.*

Introduzione

Il problema considerato nella presente nota è un classico problema di teoria lineare del trasporto di neutroni, che si può descrivere brevemente come segue. Una sorgente, S, isotropa, infinita, disposta sul piano $z = 0$, e costante nel tempo emette neutroni di una certa energia E_o all'interno di un mezzo omogeneo infinito, privo di assorbimento e consistente di nuclei di numero di massa $A \geqslant 1$ (in tale scala delle masse, il numero di massa del neutrone è $A = 1$, ed è pari a quello del protone dell'idrogeno). I neutroni emessi con energia E_o si muovono all'interno del mezzo dato per effetto delle collisioni contro i nuclei del mezzo stesso. Supporremo che queste collisioni siano elastiche, che i nuclei del mezzo siano fermi e liberi, e che a collisione avvenuta il neutrone risulti diffuso isotropicamente. Come si evince dalle leggi d'urto della cinematica classica, in ogni collisione il neutrone perde sempre una parte dell'energia posseduta prima della collisione stessa e, se si esclude il caso dell'idrogeno, si può pertanto ritenere che l'energia del neutrone assuma con continuità tutti i valori compresi fra E_o e 0 (modello del rallentamento continuo).

La trattazione matematica del problema parte dall'equazione stazionaria integro-differenziale lineare del trasporto (o di Boltzmann), che definisce il flusso angolare $f(z, E, \mu)$, e che nel presente contesto si legge come

$$\mu \frac{\partial f(z, E, \mu)}{\partial z} + \Sigma_S(E) f(z, E, \mu) = S(z, E, \mu) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\infty} \Sigma_S(E') \Pi(E' \to E) \; f(z, E', \mu') dE' \, d\mu'$$

$$(-\infty < z < \infty \, ; \;\; 0 \leqslant E < \infty \, ; -1 \leqslant \mu \leqslant 1) \; .$$

Nella (1) μ è il coseno dell'angolo fra la direzione del moto del neutrone e l'asse positivo delle z; $\Sigma_S(E)$ è la sezione d'urto (macroscopica) di diffusione ed, in base alle ipotesi fatte,

(2a) $$S(z, E, \mu) = Q(4\pi)^{-1} \; \delta(E - E_o) \, \delta(z)$$

e

(2b) $$\Pi(E' \to E) = [(1 - \alpha) E']^{-1} \; [U(E' - E) - U(E' - E/\alpha)],$$

dove δ ed U denotano la funzione delta di Dirac e quella unitaria a gradino di Heaviside, rispettivamente, ed $\alpha = (A - 1)^2 \, (A + 1)^{-2}$ è il parametro di massa con $0 < \alpha < 1$.

Non è ancora nota una soluzione analitica del problema (1) + (2a) + + (2b), laddove sono invece disponibili diversi metodi per la corrispondente soluzione numerica [(2)]. Scopo del presente lavoro è invero quello di contribuire ad una impostazione analitica, quanto più estesa possibile, del problema in esame. Con una tecnica di trasformata di Fourier rispetto a z, si comincia invero col tradurre la (1) nella corrispondente equazione per la trasformata del flusso totale $\phi(z, E) = 2\pi \int_{-1}^{1} f(z, E, \mu) \, d\mu$, o meglio, per la trasformata della densità di collisione $F(z, E) = \Sigma_S(E) \Psi(z, E)$, $\Psi(z, E)$ essendo il flusso totale dei neutroni che hanno subito almeno una collisione. Il modello del rallentamento continuo per collisioni elastiche contro nuclei fermi e liberi permette poi di determinare l'esplicita espressione analitica per la trasformata $\widetilde{F}_n(\omega, E)$, relativamente al generico intervallo energetico $\alpha^{n+1} E_o \leqslant E \leqslant \alpha^n E_o$. Sulla base della conoscenza di $\widetilde{F}_n(\omega, E)$ si risale quindi ai momenti spaziali $F_{\ell n}(E)$ della densità di collisione $F_n(z, E)$ per $E \in [\alpha^{n+1} E_o, \alpha^n E_o]$, e da quest'ultima alla soluzione di principio del problema in esame, e cioè $F(z, E) = \mathop{S}_{n=0}^{\infty} F_n(z, E) [U(\alpha^{n+1} E_o) - U(\alpha^n E_o)]$.

1. Trasformata di Fourier della (1)

Se ora si prende una trasformata di Fourier di ambo i membri della (1) rispetto a z, si divide per $\Sigma_S(E) + i\omega\mu \neq 0$, si moltiplica per $2\pi d\mu$ e si integra sopra $\mu \in [-1, 1]$, si ottiene (con $-\infty < \omega < \infty$)

$$(3) \qquad \tilde{F}(\omega, E) = h(\omega, E)\,[Qh(\omega, E_o)\,\Pi(E_o \to E) + \\ + \int_0^\infty \Pi(E' \to E)\,\tilde{F}(\omega, E')\,dE'\,] ,$$

dove

$$(4) \qquad \tilde{F}(\omega, E) = \Sigma_S(E)\,\tilde{\phi}(\omega, E) - h(\omega, E)\,Q\delta(E - E_o) ,$$

con

$$(4a) \qquad \tilde{\phi}(\omega, E) = 2\pi \int_{-1}^{1} \tilde{f}(\omega, E, \mu)\,d\mu$$

ed

$$(4b) \qquad h(\omega, E) = \frac{\tan^{-1} \omega/\Sigma_S(E)}{\omega/\Sigma_S(E)} ,$$

è la trasformata di Fourier della densità di collisione, $F(z, E)$, dei neutroni che hanno subito almeno un urto.

Usando ora la (2b) e ponendo

$$(5) \qquad \tilde{F}(\omega, E) = \mathop{S}_{n=0}^{\infty} F_n(\omega, E)\,[U(\alpha^{n+1} E_o) - U(\alpha^n E_o)] ,$$

si verifica facilmente come la (3) si converta nel seguente sistema di infinite equazioni integrali lineari (di Volterra) accoppiate per $\tilde{F}_o(\omega, E)$, $\tilde{F}_1(\omega, E)$, $\tilde{F}_2(\omega, E)$, ..., e precisamente

$$\tilde{F}_0(\omega, E) = \frac{h(\omega, E)}{1-\alpha} \left\{ \frac{Qh(\omega, E_0)}{E_0} + \right.$$

$$\left. + \int_E^{E_0} \tilde{F}_0(\omega, E') \frac{dE'}{E'} \right\} \qquad \text{per } \alpha E_0 \leqslant E \leqslant E_0 \; ;$$

(6)

$$\tilde{F}_n(\omega, E) = \frac{h(\omega, E)}{1-\alpha} \left\{ \int_E^{\alpha^n E_0} \tilde{F}_n(\omega, E') \frac{dE'}{E'} + \right.$$

$$\left. + \int_{\alpha^n E_0}^{E/\alpha} \tilde{F}_{n-1}(\omega, E') \frac{dE'}{E'} \right\}$$

$$\text{per } \alpha^{n+1} E_0 \leqslant E \leqslant \alpha^n E_0 .$$

La prima delle (6) è così una equazione autonoma per $\tilde{F}_0(\omega, E)$, e tutte le altre per $n \geqslant 1$ mostrano un termine noto dipendente da $\tilde{F}_{n-1}(\omega, E)$. Pertanto, una volta determinata $\tilde{F}_0(\omega, E)$, le successive $\tilde{F}_1(\omega, E)$, $\tilde{F}_2(\omega, E)$, ... si determinano con un intuitivo procedimento "step-by-step".

2. Il procedimento "step-by-step" per la soluzione delle (6)

Derivando ambo i membri delle (6) rispetto ad E, esse possono essere convertite nelle equivalenti equazioni differenziali lineari alle derivate parziali del I° ordine

$$\frac{\partial \tilde{F}_0(\omega, E)}{\partial E} = \left[\frac{\partial \ln h(\omega, E)}{\partial E} - \frac{h(\omega, E)}{(1-\alpha) E} \right] \tilde{F}_0(\omega, E)$$

(7)

$$\frac{\partial \tilde{F}_n(\omega, E)}{\partial E} = \left[\frac{\partial \ln h(\omega, E)}{\partial E} - \frac{h(\omega, E)}{(1-\alpha) E} \right] \tilde{F}_n(\omega, E) +$$

$$+ \frac{h(\omega, E)}{(1-\alpha) E} \tilde{F}_{n-1}(\omega, E/\alpha) \quad ,$$

da integrare con le condizioni iniziali

$$\widetilde{F}_0(\omega, E_0) = \frac{Qh^2(\omega, E)}{(1-\alpha)E_0} \tag{8a}$$

$$\widetilde{F}_1(\omega, \alpha E_0) = \widetilde{F}_0(\omega, \alpha E_0) - \frac{Qh(\omega, E_0)\, h(\omega, \alpha E_0)}{(1-\alpha)E_0} \tag{8b}$$

$$\widetilde{F}_n(\omega, \alpha^n E_0) = \widetilde{F}_{n-1}(\omega, \alpha^n E_0) \tag{8c}$$

per $E = E_0$, $E = \alpha E_0$, $E = \alpha^n E_0$, ed $n = 0$, $n = 1$, $n \geqslant 2$, rispettivamente.

Supponiamo ora, come plausibile per molti elementi di numero di massa non elevato, che la sezione d'urto (macroscopica) di diffusione $\Sigma_S(E)$ sia costante con l'energia. Ponendo allora $\Sigma_S(E) = \Sigma_S(E_0) = \Sigma_S$ ed $h(\omega, E) \to h(\omega) = (\tan^{-1} \omega/\Sigma_S)(\omega/\Sigma_S)^{-1}$, le (7) si semplificano in

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{F}_0(\omega, E)}{\partial E} &= \frac{h(\omega)}{(1-\alpha)E}\, \widetilde{F}_0(\omega, E) \\ \frac{\partial \widetilde{F}_n(\omega, E)}{\partial E} &= -\frac{h(\omega)}{(1-\alpha)E}\, [\widetilde{F}_n(\omega, E) - \widetilde{F}_{n-1}(\omega, E/\alpha)] \end{aligned} \tag{9}$$

con le condizioni iniziali

$$\widetilde{F}_0(\omega, E_0) = \frac{Qh^2(\omega)}{(1-\alpha)E_0} \qquad (n=0) \tag{10a}$$

$$\widetilde{F}_1(\omega, \alpha E_0) = \widetilde{F}_0(\omega, \alpha E_0) - \widetilde{F}_0(\omega, E_0) \qquad (n=1) \tag{10b}$$

$$\widetilde{F}_n(\omega, \alpha^n E_0) = \widetilde{F}_{n-1}(\omega, \alpha^n E_0) \qquad (n \geqslant 2) \tag{10c}$$

E' facile allora verificare che la soluzione della prima delle (9) è

$$\widetilde{F}_0(\omega, E) = \widetilde{F}_0(\omega, E_0) \exp\left[\frac{h(\omega)}{1-\alpha}\, \ell n\, \frac{E_0}{E}\right] \tag{11}$$

con $\widetilde{F}_0(\omega, E_0)$ data dalla (10a). Usando la (11) nella seconda delle (9)

con $n = 1$, si ottiene quindi, in base alla (10b), $\widetilde{F}_1(\omega, E)$, che, a sua volta, viene introdotta nella seconda delle (9) con $n = 2$ per dare, in base alla (10c), $\widetilde{F}_2(\omega, E)$, e così via. Per la generica $\widetilde{F}_n(\omega, E)$ $(n=1, 2, 3,...)$ si trova così la formula esplicita di ricorrenza

$$\widetilde{F}_n(\omega,E)=\widetilde{F}_0(\omega,E) \mathop{S}_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left\{\left[\left(\ell n^{-1} \frac{1}{\alpha} \ell n \frac{E_0}{E} - k\right) qh(\omega)\right]^k + \right.$$

$$\text{(12)} \qquad \left. + k\left[\left(\ell n^{-1} \frac{1}{\alpha} \ell n \frac{E_0}{E} - k\right) qh(\omega)\right]^{k-1} \right\} e^{-kqh(\omega)} \ ,$$

dove si è posto $q = (1/1-\alpha)\,\ell n \dfrac{1}{\alpha}$ con $1 < q < 2$ per la maggior parte degli elementi. La (12) costituisce un risultato di notevole interesse sia concettuale sia pratico. Invero, prendendo l'antitrasformata di $\widetilde{F}_n(\omega, E)$ rispetto ad ω noi possiamo risalire alla densità di collisione $F_n(z, E)$ relativamente all'intervallo $\alpha^{n+1} E_0 \leqslant E \leqslant \alpha^n E_0$. La soluzione del problema in esame sarà pertanto quella funzione $F(z, E)$ che, per ogni z, coincide con $F_n(z, E)$ per $E \in [\alpha^{n+1} E_0, \alpha^n E]$. Tale funzione $F(z, E)$ è rispetto ad E una funzione continua a tratti, in quanto per $E = E_0$ essa mostra una discontinuità di prima specie. In alternativa all'antitrasformazione diretta di $\widetilde{F}_n(\omega, E)$, un altro problema fisicamente interessante è quello della determinazione dei momenti

$$\text{(13)} \qquad F_{\ell n}(E) = \int_{-\infty}^{\infty} x^\ell F_n(x, E)\, dx \qquad (\ell = 0, 1, 2, ...)$$

della cercata densità di collisione. (L'impiego nella (13) della variabile spaziale adimensionale $x = \Sigma_S z$ corrisponde a sostituire nella (12) ω/Σ_S con ω).

3. I momenti $F_{\ell n}(E)$, Eq. (13)

Dalla teoria delle trasformate di Fourier è noto che

$$\text{(14)} \qquad (-i)^\ell F_{\ell n}(E) = \left\{ \frac{\partial^\ell \widetilde{F}_n(\omega, E)}{\partial \omega^\ell} \right\}_{\omega=0}$$

essendo $\widetilde{F}_n(\omega, E)$ espressa appunto dalla (12). Data la simmetria piana del problema, tutti i momenti di ordine dispari ($\ell = 1, 3, 5, \ldots$) sono nulli. Per i primi momenti di ordine pari si avrà invece esplicitamente

$$F_{0n}(E) = \frac{Q}{(1-\alpha)E_0} \exp\left(\frac{1}{1-\alpha} \ell n \frac{E_0}{E}\right) \times \tag{15a}$$

$$\cdot \mathop{S}_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ \left[q\left(\ell n^{-1} \frac{1}{\alpha} \ell n \frac{E_0}{\alpha} - k\right)\right]^k + \right.$$

$$\left. + k \left[q\left(\ell n^{-1} \frac{1}{\alpha} \ell n \frac{E_0}{E} - k\right)\right]^{k-1} \right\} e^{-kq} \quad ;$$

$$F_{2n}(E) = -\frac{Q}{(1-\alpha)E_0} \exp\left(\frac{1}{1-\alpha} \ell n \frac{E_0}{E}\right) \left[\frac{d^2 h(\omega)}{d\omega^2}\right]_{\omega=0} \times \tag{15b}$$

$$\mathop{S}_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ \left[q\left(\ell n^{-1} \frac{1}{\alpha} \ell n \frac{E_0}{E} - k\right)\right]^{k+1} + \right.$$

$$+ 2(k+1) \left[q\left(\ell n^{-1} \frac{1}{\alpha} \ell n \frac{E_0}{E} - k\right)\right]^{k} +$$

$$\left. + k(k+1) \left[q\left(\ell n^{-1} \frac{1}{\alpha} \ell n \frac{E_0}{E} - k\right)\right]^{k-1} \right\} e^{-kq} \quad ;$$

$$(15c)\quad F_{4n}(E)=\frac{Q}{(1-\alpha)E_0}\exp\left(\frac{1}{1-\alpha}\,\ell n\,\frac{E_0}{E}\right)\left[\frac{d^4h(\omega)}{d\omega^4}\right]_{\omega=0}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\left\{\left[q\left(\ell n^{-1}\frac{1}{\alpha}\,\ell n\,\frac{E_0}{E}-k\right)\right]^{k+1}+\right.$$

$$+2(k+1)\left[q\left(\ell n^{-1}\frac{1}{\alpha}\,\ell n\,\frac{E_0}{E}-k\right)\right]^{k}+$$

$$\left.+k(k+1)\left[q\left(\ell n^{-1}\frac{1}{\alpha}\,\ell n\,\frac{E_0}{E}-k\right)\right]^{k-1}\right\}e^{-kq}+$$

$$+\frac{Q}{(1-\alpha)E_0}\exp\left(\frac{1}{1-\alpha}\,\ell n\,\frac{E_0}{E}\right)\left[\frac{d^2h(\omega)}{d\omega^2}\right]^2_{\omega=0}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\left\{\left[q\left(\ell n^{-1}\frac{1}{\alpha}\ell n\,\frac{E_0}{E}-k\right)\right]^{k+2}+\right.$$

$$+(3k+4)\left[q\left(\ell n^{-1}\frac{1}{\alpha}\,\ell n\,\frac{E_0}{E}-k\right)\right]^{k+1}+$$

$$+(k+1)(3k+2)\left[q\left(\ell n^{-1}\frac{1}{\alpha}\,\ell n\,\frac{E_0}{E}-k\right)\right]^{k}+$$

$$\left.+k^2(k+1)\left[q\left(\ell n^{-1}\frac{1}{\alpha}\,\ell n\,\frac{E_0}{E}-k\right)\right]^{k-1}\right\}e^{-kq}\quad,$$

che risultano essere il momento

$$F_{00}(E)=\frac{Q}{(1-\alpha)E_0}\exp\left(\frac{1}{(1-\alpha)}\ell n\,\frac{E_0}{E}\right)$$

modulato da un polinomio in $\left(\frac{1}{1-\alpha}\,\ell n\,\frac{E_0}{E}\right)$ di grado n, $n+1$, ed $n+2$, rispettivamente. Nelle (15)

$$(16)\qquad \left[\frac{d^{2\ell}h(\omega)}{d\omega^{2\ell}}\right]_{\omega=0}=(-1)^{\ell}\,\frac{(2\ell)!}{2\ell+1}\quad,\qquad(\ell=0,1,2,\ldots),$$

laddove le derivate di ordine dispari si annullano tutte per $\omega \to 0$, come si può verificare ricorrendo alla rappresentazione di $\frac{\tan^{-1} \omega}{\omega}$ in serie di potenze di ω^2.

Per induzione si può quindi provare che il generico momento $F_{2\ell,n}(E)$ sarà del tipo

$$F_{2\ell,n}(E) = \frac{Q}{(1-\alpha)E_0} \exp\left(\frac{1}{1-\alpha} \ln \frac{E_0}{E}\right) \sum_{k=0}^{n+\ell} A_k^{\ell n} \left(\frac{1}{1-\alpha} \ln \frac{E_0}{E}\right)^k , \tag{17}$$

per i coefficienti (costanti) $A_k^{\ell n}$ potendosi ricavare appropriate formule di ricorrenza.

BIBLIOGRAFIA

[1] Boffi V. - *Fisica del Reattore Nucleare*, Patron, Bologna, 1974.

[2] Duderstadt J.J. , Martin W.R. - *Transport Theory*, Wiley, New York, 1979.

Sur la dynamique analytique des profils a pointe

PIERRE CAPODANNO
Laboratoire de Mécanique Théorique
Faculté des Sciences - F-25030 - Besançon Cedex (France)

Résumé. *Quand un profil à pointe se déplace dans un fluide parfait incompressible en mouvement irrotationnel, au repos à l'infini, la condition de Kutta-Joukowski fournit une relation linéaire à coefficients constants entre les paramètres de vitesse du profil et la circulation. Quand cette dernière reste constante, on peut considérer que cette relation traduit une liaison non holonome.*

Utilisant alors une forme des équations du mouvement d'un système non holonome obtenue par le Prof. Agostinelli [1], *nous pouvons écrire les équations de tous les mouvements à circulation constante d'un profil à pointe soumis à des forces données. Nous étudions ensuite des cas d'intégration de ces équations et traitons quelques problèmes de stabilité.*

1). Considérons un profil (c) sans pointe animé d'un mouvement quelconque au sein d'un fluide parfait incompressible (masse spécifique ρ) en mouvement irrotationnel, au repos à l'infini par rapport à des axes orthonormés absolus $O_1x_1y_1$.

Dans le cas où la circulation autour du profil est nulle, on sait que la force vive $2T$ du système profil-fluide existe et qu'on peut trouver un système d'axes orthonormés Ox, Oy liés au profil tel que

$$(1) \qquad 2T = A\ell^2 + Bm^2 + C\omega^2$$

où ℓ, m sont les composantes sur Ox, Oy de la vitesse de O, ω est la vitesse angulaire de rotation (si $\theta = O_1x_1, Ox$, $\dot{\theta}(t) = \omega(t)$) et A, B, C sont des constantes positives dépendant de la forme du profil, de la distribution des masses à son intérieur et de ρ ($B \geqslant A$) [5].

Quand la circulation Γ n'est pas nulle, on peut montrer [4] que les équations du mouvement sont les équations de Lagrange obtenues à partir de la force vive précédente et en ajoutant aux forces données agissant sur le profil la force de Joukowski correspondant à son centre.

Supposons maintenant que le profil présente une pointe. La condition de Kutta-Joukowski su traduit par une relation linéaire à coefficients constants entre Γ, ℓ, m, ω [6]. Pour un mouvement quelconque, la circulation varie avec le temps et un sillage tourbillonnaire apparaît derrière le profil; mais, si le mouvement est convenablement choisi, la circulation reste constante et on obtient les mouvements à circulation constante [9], [6], sans sillage tourbillonnaire, *qui sont les seuls qui nous intéresseront dans la suite.*

Nous supposerons pour simplifier, que le profil est à centre de portance, de sorte que la condition de Joukowski s'écrit

$$m + \delta\omega - \gamma = 0 \tag{2}$$

où δ est une constante dépendant de la géométrie du profil, de la distribution des masses à son intérieur et de ρ et γ est la constante $\Gamma/4\Pi a$, a étant le rayon du cercle dont l'extérieur est transformé en l'extérieur du profil par la représentation conforme canonique [6].

Nous considèrerons que la condition de Joukowski traduit une liaison non holonome et que les forces qui assurent cette liaison ne travaillent pas dans tout déplacement virtuel compatible avec elle.

Le Prof. Agostinelli [1] a obtenu le théorème suivant: un système non holonome est réductible à un système holonome soumis à des forces supplémentaires fonctions quadratiques des vitesses et dépendant des forces données et des équations de liaison et admettant comme intégrales premières les premiers membres des équations de liaison égalés à une constante.

Il est dès lors évident que les équations du Prof. Agostinelli vont nous permettre d'obtenir celles de tous les mouvements à circulation constante d'un profil à pointe soumis à des forces données.

2). Introduisons comme paramètres lagrangiens q_1, q_2, q_3 les coordonnées absolues de 0 et l'angle θ. Nous avons alors:

$$2T = (A\cos^2 q_3 + B\sin^2 q_3)\dot{q}_1^2 + \\ + (A\sin^2 q_3 + B\cos^2 q_3)\dot{q}_2^2 + 2(A-B)\sin q_3\,\dot{q}_1\,\dot{q}_2 + C\dot{q}_3^2\,.$$

Désignant par Q_1', Q_2', Q_3' les composantes lagrangiennes des forces données, nous obtenons pour composantes lagrangiennes de ces dernières et de la force de Joukowski [3]

$$\begin{cases} Q_1 = Q_1' - \rho\Gamma\,[\dot{q}_2 + (x_c \cos q_3 - y_c \sin q_3)\,\dot{q}_3] \\ Q_2 = Q_2' + \rho\Gamma\,[\dot{q}_1 - (x_c \sin q_3 + y_c \cos q_3)\,\dot{q}_3] \\ Q_3 - Q_3' + \rho\Gamma\,[(x_c \cos q_3 - y_c \sin q_3)\,\dot{q}_1 + \\ \qquad + (x_c \sin q_3 + y_c \cos q_3)\,\dot{q}_2] \end{cases}$$

où x_c, y_c désignent les coordonnées du centre du profil dans Oxy. La condition de Joukowski s'écrit

$$-\dot{q}_1 \sin q_3 + \dot{q}_2 \cos q_3 + \delta \dot{q}_3 - \gamma = 0 .$$

Il est alors facile de voir que les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme d'Agostinelli

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} - Q_1 = -\tau \sin q_3 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} - Q_2 = \tau \cos q_3 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_3}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_3} - Q_3 = \delta \tau \end{cases}$$

avec

$$(4) \qquad \tau = -\frac{BC}{C+\delta^2 B}\left[-\frac{A}{B}\,\ell\omega + \frac{\delta(A-B)}{C}\,\ell m + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{B}\,(-\sin q_3\, Q_1 + \cos q_3\, Q_2) + \frac{\delta}{C}\,Q_3\right] .$$

Tout se passe donc comme si le profil n'avait pas de pointe et était soumis aux forces fonnées, aux forces aérodynamiques et à une force $\vec{\tau}$ portée par la droite (Δ) liée au profil, d'équation $x = \delta$.

Ce résultat pouvait être prévu. En effet, le travail virtuel des forces de

liaison dans un déplacement virtuel non compatible est

$$\lambda(-\delta q_1 \sin q_3 + \delta q_2 \cos q_3 + \delta \cdot \delta q_3)$$

où λ est le multiplicateur, de sorte que ces forces sont équivalentes à une force unique portèe par (Δ); on a évidemment $\tau = \lambda$.

On en déduit immédiatement les équations réduites du mouvement [5], [4]. Désignant par X, Y, N les éléments de réduction en 0 des forces données et remarquant

$$-\sin q_3 Q_1 + \cos q_3 Q_2 = Y + \rho\Gamma(\ell - \omega y_c) \; ;$$
$$Q_3 = N + \rho\Gamma(\ell x_c + m y_c) \; ,$$

nous avons les équations

$$(5) \qquad \begin{cases} A\dfrac{d\ell}{dt} - B\omega m = X - \rho\Gamma(m + \omega x_c) \\[2ex] B\dfrac{dm}{dt} + A\omega\ell = Y + \rho\Gamma(\ell - \omega y_c) + \tau \\[2ex] C\dfrac{d\omega}{dt} + (B-A)\ell m = N + \rho\Gamma(\ell x_c + m y_c) + \delta\tau \end{cases}$$

avec

$$(6) \qquad \tau = -\frac{BC}{C + \delta^2 B}\left\{-\frac{A}{B}\ell\omega + \frac{\delta(A-B)}{C}\ell m + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{B}[Y + \rho\Gamma(\ell - \omega y_c)] + \frac{\delta}{C}[N + \rho\Gamma(\ell x_c + m y_c)]\right\} .$$

Ajoutant à la deuxième équation (5) la troisième préalablement multipliée par $\dfrac{\delta B}{C}$, nous obtenons

$$B\left(\frac{dm}{dt} + \delta\frac{d\omega}{dt}\right) = 0 \; ,$$

donc l'intégrale première, prévue par Agostinelli:

$$m + \delta\omega = Cte \; .$$

Les mouvements à circulation constante donnée Γ d'un profil à pointe sont donc les solutions particulières des équations (5) qui satisfont à la relation $m + \delta\omega = \Gamma/4\Pi a$.

Evidemment, les équations obtenues en remplaçant Γ par $4\Pi a(m+\delta\omega)$ dans les équations (5), c'est-à-dire

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &A\frac{d\ell}{dt} - B\omega m = X - 4\Pi a\rho\,(m+\delta\omega)(m+\omega x_c)\\ &B\frac{dm}{dt} + A\omega\ell = Y + 4\Pi a\rho\,(m+\delta\omega)(\ell-\omega y_c) + \tau\\ &C\frac{d\omega}{dt} + (B-A)\,\ell m = N + 4\Pi a\rho\,(m+\delta\omega)(\ell x_c + m y_c) + \delta\tau \end{aligned}\right.$$

avec

$$(8)\quad \tau = -\frac{BC}{C+\delta^2 B}\left\{-\frac{A}{B}\ell\omega + \frac{\delta(A-B)}{C}\ell m + \frac{Y}{B} + \frac{\delta N}{C} + 4\Pi a\rho\,(m+\delta\omega)\left[\frac{\ell-\omega y_c}{B} + \frac{\delta}{C}(\ell x_c + m y_c)\right]\right\}$$

qui admettent l'intégrale première

$$m + \delta\omega = Cte$$

sont les équations de tous les mouvements à circulation constante des profils à pointe à centre de portance scumis à des forces données.

3). Nous allons chercher s'il est possible de choisir le profil et les forces données pour que les forces de liaison soient nulles quelles que soient les vitesses satisfaisant à l'équation (2).

Nous devons avoir, en utilisant l'expression (6) de τ

$$-\omega\ell\left[A-\frac{\delta^2 B(B-A)}{C}\right]-\rho\Gamma\ell\left[\frac{\delta B(B-A)}{4\Pi a\rho C}-\right.$$

$$\left.-\left(1+\frac{\delta B}{C}x_c\right)\right]-\frac{\rho\Gamma\delta^2 B}{C}\,y_c\,\omega+$$

$$+\left(Y+\frac{\delta B}{C}N+\frac{\rho\Gamma\gamma\delta B}{C}\,y_c\right)=0$$

quels que soient ℓ, ω, ce qui donne, en admettant que Y et N ne dépendent pas des vitesses, les conditions indépendantes de la constante Γ

$$\delta^2=\frac{AC}{B(B-A)}\ ;\ y_c=0\ ;\ 1+\frac{\delta B}{C}x_c-\frac{\delta B(B-A)}{4\Pi a\rho C}=0 \tag{9}$$

$$Y+\frac{\delta B}{C}N=0\ . \tag{10}$$

Nous verrons plus loin qu'il existe des profils satifaisant aux conditions (9). La condition (10) exprime que les forces données sont équivalentes à une force unique appliquée au point $x=-\dfrac{C}{\delta B}$, $y=0$ du profil.

Pour les profils particuliers satisfaisant aux conditions (9) soumis à des forces données vérifiant (10), les mouvements à circulation constante s'obtiennent sans forces de liaison. Ils sont solutions du système différentiel.

$$\left\{\begin{aligned} &A\frac{d\ell}{dt}-B\omega m=X-4\Pi a\rho\,(m+\delta\omega)(m+\omega x_c)\\ &B\frac{dm}{dt}+A\omega\ell=Y+4\Pi a\rho\ell\,(m+\delta\omega)\\ &C\frac{d\omega}{dt}+(B-A)\,\ell m=-\frac{C}{\delta B}\,Y+4\Pi a\rho x_c\,\ell\,(m+\delta\omega)\end{aligned}\right. \tag{11}$$

– Montrons l'existence de profils satisfaisant aux conditions (9).

Prenons un profil géometriquement et dynamiquement symétrique;

alors le centre C du profil sur Ox ($y_c = 0$) et il en est de même de son centre d'inertie G.

Si Ω est la distance du centre C à la droite (Δ), nous avons $x_c = \delta - \Omega$ et les équations (9) donnent

$$\delta = \frac{A\left(\frac{a_1}{a} + \Omega\right)}{A + 4\Pi\rho a_1},$$

où a_1 est défini par $B - A = 4\Pi\rho a_1$.

Si nous désignons par δ_0 et ξ les distances de (Δ) et de G au pôle du profil [1] et par μ la masse du profil, nous avons

$$\xi = \frac{B}{\mu}(\delta_0 - \delta)$$

δ et ξ, qui fixent G, dépendent de la géométrie du profil, de sa masse μ et de ρ. Enfin, si I_G est le moment d'inertie en G du profil, nous avons

$$I_G = C - \rho\gamma - \frac{\mu(B - \mu)}{B}\xi^2$$

où γ est ici une constante positive dépendant de la géométrie du profil, si, bien entendu, la valeur ainsi obtenue pour I_G est positive. On constante facilement que I_G est de l'ordre de ρ.

Prenons alors une plaque de longueur 4a. Les formules précédentes donnent

$$\delta = \frac{2\mu a}{\mu + 4\Pi\rho a^2} \quad ; \quad \xi = -a\frac{\mu - 4\Pi\rho a^2}{\mu} \quad ;$$

$$I_G = 2\Pi\rho\frac{5\mu - 8\Pi\rho a^2}{\mu}a^4 \ .$$

Comme ρ est petit, I_G est positif.

---

(1) Pour la définition du pôle du profil, voir [6].

Par conséquent, si on considère un profil mince symétrique voisin de la plaque et de masse donnée, on détermine δ, ξ, I_G comme il a été indiqué. I_G est certainement positif et il suffit de concentrer la masse du profil dans un petit cercle de centre G et de rayon convenable proportionnel à $\sqrt{\rho}$.

– Considérons le cas d'un profil satisfaisant aux conditions (9) et soumis aux seules forces aérodynamiques ($X = Y = 0, N = 0$).

Les équations (11) admettent deux intégrales premières

$$\begin{cases} m + \delta\omega = Cte = k \\ A\ell^2 + Bm^2 + C\omega^2 = Cte = h \end{cases}$$

de sorte qu'il est facile de voir que l'intégration est élémentaire.

Nous avons, en effet

$$m = k - \delta\omega \qquad \text{et} \qquad \ell = \pm \frac{\sqrt{(h - Bk^2) + 2\delta Bk\omega - (C + \delta^2 B)\,\omega^2}}{\sqrt{A}}$$

donc en portant dans la deuxième équation (11)

$$\sqrt{A}\ \delta B \frac{d\omega}{dt} = \pm (A\omega - 4\Pi a\rho k)\sqrt{(h - Bk^2) + 2\delta Bk\omega - (C + \delta^2 B)\omega^2}$$

ce qui démontre le résultat annoncé.

– Plaçons nous encore dans ce cas. Nous voyons immédiatement que les mouvements de translation rectiligne uniforme ne sont possibles qu'à circulation nulle, de sorte que ces mouvements sont définis par

$$\ell = \ell_0 = Cte \text{ quelconque } ; \ m = 0 \ ; \ \omega = 0 \,.$$

En pratique, la pointe du profil a une abscisse positive; nous supposerons donc $\ell_0 < 0$.

Il est facile de démontrer que ces translations rectilignes uniformes sont stables par rapport à tous les mouvements voisins à circulation constante.

Considérons pour celà un mouvement correspondant à des valeurs

initiales $\bar{\ell}_0, \bar{m}_0, \bar{\omega}_0$ voisines de $\ell_0, 0, 0$. Alors $\bar{\ell}_0$ est négatif et nous avons

$$t-t_0=\sqrt{A\delta B}\int_{\bar{\omega}_0}^{\omega}\frac{d\omega}{(4\Pi a\rho k-A\omega)\sqrt{(h-Bk^2)+2\delta Bk\omega-(C+\delta^2 B)\omega^2}}$$

où $k=\bar{m}_0+\delta\bar{\omega}_0$ et $h=A\bar{\ell}_0^2+B\bar{m}_0^2+C\bar{\omega}_0^2$; $|k|$ est petit comme $|\bar{m}_0|$, $|\bar{\omega}_0|$ et h est voisin de $A\ell_0^2$.

Le trinôme sous le radical s'annule pour ω voisin des valeurs finies $\pm\sqrt{\dfrac{A\ell_0^2}{C+\delta^2 B}}$ tendis que $4\Pi a\rho k-A\omega$ s'annule pour $\omega=\dfrac{4\Pi a\rho k}{A}$, de module petit avec $|k|$.

Alors, si $\bar{\omega}_0>\dfrac{4\Pi a\rho k}{A}$ $\left(\text{resp} < \dfrac{4\Pi a\rho k}{A}\right)$, $\omega(t)$ décroît (resp. croît) et atteint $\dfrac{4\Pi a\rho k}{A}$ au bout d'un temps infini, de sorte que $\omega(t)$ reste compris entre $\bar{\omega}_0$ et $\dfrac{4\Pi a\rho k}{A}$. $|\omega(t)|$ peut donc être aussi petit qu'on veut si l'on prend $|\bar{m}_0|, |\bar{\omega}_0|$ suffisamment petits. Il en est de même de $|m(t)|$ et si, en outre, $|\bar{\ell}_0-\ell_0|$ est suffisamment petit, pour $|\ell(t)-\ell_0|$, en vertu des intégrales premières, ce qui démontre le résultat annoncé.

4). Reprenons maintenant les équations générales (7) des mouvements à circulation constante des profils à pointe soumis à des forces données.

La deuxième de ces équations peut s'écrire

$$\begin{aligned}B\frac{dm}{dt}+A\omega\ell= {} & \frac{\delta B}{C+\delta^2 B}(\delta Y-N)+4\Pi a\rho(m+\delta\omega)(\ell-\omega y_c)\\ & -\frac{BC}{C+\delta^2 B}-\frac{A}{B}\ell\omega+\\ & +\frac{\delta(A-B)}{C}\ell m+4\Pi a\rho(m+\delta\omega)\left[\frac{\ell-\omega y_c}{B}+\frac{\delta}{C}(\ell x_c+my_c)\right]\end{aligned}$$

Par conséquent, si $X=0$ et $N=\delta Y$, c'ést-à-dire si les forces données

sont équivalentes à une force unique portée par la droite (Δ), les équations des mouvements à circulation constante sont indépendantes de la grandeur de cette force; ce sont

$$
(12) \quad \begin{cases}
A \dfrac{d\ell}{dt} - B\omega m = -4\Pi a\rho\,(m + \delta\omega)(m + \omega x_c) \\[2ex]
B \dfrac{dm}{dt} + A\omega\ell = 4\Pi a\rho\,(m + \delta\omega)(\ell - \omega y_c) - \\[2ex]
\qquad - \dfrac{BC}{C + \delta^2 B} \left\{ -\dfrac{A}{B}\ell\omega + \dfrac{\delta(A-B)}{B}\ell m + \right. \\[2ex]
\qquad \left. + 4\Pi a\rho\,(m + \delta\omega)\left[\dfrac{\ell - \omega y_c}{B} + \dfrac{\delta}{C}(\ell x_c + m y_c)\right] \right\} \\[2ex]
m + \delta\omega = Cte = \gamma\ .
\end{cases}
$$

Ceci était à prévoir puisque la force de liaison est portée par (Δ); cette force τ dépend, bien entendu, des forces données.

On notera que ce cas particulier se produit quand le profil est soumis aux seules forces aérodynamiques (et évidemment aux forces de liaison).

– Il est aisé de voir que, dans les conditions de l'alinéa précédent, les seules translations rectilignes uniformes possibles sont à circulation nulle

$$\ell = \ell_0 < 0 \quad , \quad m = 0 \quad , \quad \omega = 0\ .$$

Etudions leur stabilité par rapport aux mouvements à circulation constante voisins. L'absence d'une intégrale première autre que la dernière équation (12) rend difficile la construction d'une fonction de Liapounoff. Posons $\ell = \ell_0 + L$, gardons m et ω pour les autres variables et introduisons au lieu de m la variable $x = m + \delta\omega$. Les équations (12) prennent alors la forme

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= -\frac{\delta B}{A}\omega^2 - \frac{4\Pi a\rho}{A}x^2 - \frac{B-4\Pi a\rho(x_c-\delta)}{A}\omega x \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\delta B \ell_0}{C+\delta^2 B} - \frac{B-A-4\Pi a\rho(x_c-\delta)}{C+\delta^2 B}\ell_0 x \\
&\quad + \frac{\delta B}{C+\delta^2 B}\omega L - \frac{B-A-4\Pi a\rho(x_c-\delta)}{C+\delta^2 B}Lx - \\
&\quad - \frac{4\Pi a\rho y_c}{C+\delta^2 B}x^2 \\
\frac{dx}{dt} &= 0 .
\end{aligned}
\right.
$$

L'équation caract-eristique de la matrice du système linéarisé a une racine double nulle et la racine simple $\frac{\delta \ell_0}{C+\delta^2 B}$ négative, puisque, en pratique, δ est positif; nous avons donc affaire à un cas critique.

Faisons le changement de fonction inconnue

$$
\omega = u + \frac{B-A-4\Pi a\rho(x_c-\delta)}{\delta B}x .
$$

Le système (13) devient

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= -\frac{\delta B}{A}u^2 + \left[2 - \frac{B-4\Pi a\rho(x_c-\delta)}{A}\right]ux + \\
&\quad + \left[\frac{B-A-4\Pi a\rho(x_c-\delta)}{\delta B} - \frac{4\Pi a\rho}{A}\right]x^2 \\
\frac{du}{dt} &= \frac{\delta B \ell_0}{C+\delta^2 B}u + \frac{\delta B}{C+\delta^2 B}uL + \frac{4\Pi a\rho y_c}{C+\delta^2 B}x^2 \\
\frac{dx}{dt} &= 0 .
\end{aligned}
\right.
$$

Nous nous trouvons dans le cas singulier de Malkin-Liapounoff [7] si les seconds membres sont nuls pour $u = 0$, quelles que soient les variables critiques L, x.

Il y a donc *stabilité* si

$$y_c = 0 \quad , \quad \delta = \frac{A}{4\Pi\rho a_1}\left(\frac{a_1}{a} - x_c\right) \quad .$$

Il est possible d'obtenir des profils satisfaisant à ces conditions.

Nous prenons des profils géométriquement et dynamiquement symétriques de masse donnée μ. Comme $x_c = \delta - \Omega$, nous avons

$$\delta = \frac{A\left(\frac{a_1}{a} + \Omega\right)}{A + 4\Pi\rho a_1}$$

et le centre d'inertie G doit être à la distance

$$\xi = \frac{B}{\mu}(\delta_0 - \delta)$$

du pôle du profil, ce qu'on peut toujours réaliser en distribuant convenablement la masse à l'intérieur du profil.

Remarque

Quand les conditions précédentes ne sont pas remplies, la méthode de Malkin pour l'étude du cas critique [7] conduit à un cas transcendant et on ne peut conclure. On aboutit à la même conclusion en utilisant les résultats sur la stabilité en présence d'intégrales premières [8]. $x = Cte$ est une intégrale première et le système "réduit" est donc

$$(15) \quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = -\dfrac{\delta B}{A} u^2 \\[2ex] \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\delta B \ell_0}{C + \delta^2 B} u + \dfrac{\delta B}{C + \delta^2 B} uL \quad . \end{cases}$$

Sa solution triviale est stable (c'est le cas singulier du premier cas critique), mais pas totalement stable.

Cependant, comme les équations (15) s'obtiennent à partir des équations (14) en faisant $x=0$, nous pouvons dire que les mouvements de translation rectiligne uniforme sont stables par rapport aux mouvements voisins à circulation nulle.

– On peut obtenir un cas remarquable d'intégration des équations (12) ou, ce qui revient au même, des équations (14).

Eliminant L entre les deux premières équations (14) et tenant compte de $x = Cte$, nous obtenons l'équation différentielle

$$u\frac{d^2u}{dt^2}-\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{4\Pi a\rho y_c}{C+\delta^2 B}\frac{du}{dt}=\frac{\delta B}{C+\delta^2 B}u^2 x$$

$$\left[-\frac{\delta B}{A}u^2+\left(\frac{B-A-4\Pi a\rho\,(x_c-\delta)}{A}\right)xu+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{B-A-4\Pi a\rho\,(x_c-\delta)}{\delta B}-\frac{4\Pi a\rho}{A}\right)x^2\right].$$

Prenant classiquement u comme variable et $v=\dfrac{du}{dt}$ comme fonction inconnue, nous obtenons une équation du premier ordre et il est facile de voir que si $y_c = 0$ (en particulier pour les profils géométriquement et dynamiquement symétriques), cette équation est linéaire en v^2 et $\dfrac{d(v^2)}{du}$; nous obtenons alors

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2=\frac{2\delta B}{C+\delta^2 B}\,u^2\left[-\frac{B}{A}u^2+\right.$$

$$+\left(2-\frac{B-A-4\Pi a\rho\,(x_c-\delta)}{A}\right)xu+$$

$$\left.+\left(\frac{B-A-4\Pi a\rho\,(x_c-\delta)}{\delta B}-\frac{4\Pi a\rho}{A}\right)x^2\log|u|+Cte\right]$$

et l'intégration des équations (12) est remenée à une seule quadrature.

Cette quadrature est élémentaire dans le cas des profils mis en évidence au précedent alinéa.

5). Considérons maintenant le cas du profil pesant. Des cas très particuliers d'intégration ont été étudiés dans [2].

Les équations des mouvements à circulation constante d'un profil pesant sont

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \\ A\dfrac{d\ell}{dt} - B\omega m = -\mu g \sin\theta - 4\Pi a\rho\,(m+\delta\omega)(m+\omega x_c) \\ B\dfrac{dm}{dt} + A\omega\ell = -\mu g\cos\theta + 4\pi a\rho\,(m+\delta\omega)(\ell-\omega y_c) + \tau \\ m+\delta\omega = Cte = \gamma \end{cases}$$

avec

$$\tau = -\frac{BC}{C+\delta^2 B}\left\{ -\frac{A}{B}\ell\omega + \frac{\delta(A-B)}{C}\ell m + \right.$$
$$+\frac{1}{B}[-\mu g\cos\theta + 4\Pi a\rho(m+\delta\omega)(\ell-\omega y_c)]$$
$$+\frac{\delta}{C}[-\mu g(x_G\cos\theta - y_G\sin\theta) +$$
$$\left. +4\Pi a\rho\,(m+\delta\omega)(\ell x_c + m y_c)] \right\}$$

où μg est le poids du profil et (x_G, y_G) les coordonnées de son centre d'inertie G par rapport aux axes Ox, Oy.

Il est facile de voir que des translations horizontales uniformes à circulation nulle

$$\ell = \ell_0 < 0 \quad , \quad m = 0 \quad , \quad \theta = 0 \quad , \quad \omega = 0$$

sont possibles quand $x_G = \delta$, donc quand le point G se trouve sur la droite (Δ), ce qu'on peut réaliser en distribuant convenablement la masse à l'intérieur du profil.

Posant $\ell = \ell_0 + L$, gardant θ, m, ω pour les autres variables et introduisant au lieu de m la variable $x = m + \delta\omega$, nous pouvons réécrire les équations (16) sous la forme

$$
(17)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = 0 \\
&\frac{d\theta}{dt} = \omega \\
&\frac{dL}{dt} = -\frac{\mu g}{A}\sin\theta - \frac{\delta B}{A}\omega^2 - \frac{4\Pi a\rho}{A}x^2 + \\
&\qquad + \frac{B - 4\Pi a\rho(x_c - \delta)}{A}\,\omega x \\
&\frac{d\omega}{dt} = \frac{\delta B \ell_0}{C = \delta^2 b} - \frac{B - A - 4\Pi a\rho(x_c - \delta)}{C + \delta^2 B}\,\ell_0 x + \\
&\qquad + \frac{\mu g\, y_G}{C + \delta^2 B}\sin\theta \\
&\qquad + \frac{\delta B}{C + \delta^2 B}\,\omega L - \frac{B - A - 4\Pi a\rho(x_c - \delta)}{C + \delta^2 B}\,Lx + \\
&\qquad\qquad + \frac{4\Pi a\rho y_c}{C + \delta^2 B}\,x^2 \quad .
\end{aligned}
\right.
$$

L'équation caractéristique du système linéarisé est

$$
(18)\qquad s^2\left(s^2 - \frac{\delta B \ell_0}{C + \delta^2 B}\,s - \frac{\mu g\, y_G}{C + \delta^2 B}\right) = 0 \quad .
$$

Si $y_G > 0$, cette équation a une racine positive et tout mouvement de translation horizontale uniforme à circulation nulle est donc instable.

Si $y_G < 0$, nous avons affaire à un cas critique. Utilisant le fait que $x = Cte$ est un intégrale première de (17), nous considérons le système "réduit".

$$(19) \quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \\ \dfrac{dL}{dt} = -\dfrac{\mu g}{A}\sin\theta - \dfrac{\delta B}{A}\,\omega^2 \\ \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{\delta B \ell_0}{C+\delta^2 B}\,\omega + \dfrac{\mu g\, y_G}{C+\delta^2 B}\sin\theta + \dfrac{\delta B}{C+\delta^2 B}\,\omega L\,. \end{cases}$$

L'équation caractéristique du système linéarisé correspondant a les mêmes racines que (18), la racine nulle étant ici simple. Il est facile de voir que la méthode de Malkin pour le premier cas critique conduit au cas singulier, de sorte que la solution triviale de (19) est stable, mais pas totalement stable.

Donc, si $y_G < 0$, on ne peut conclure quant à la stabilité d'un mouvement de translation horizontale uniforme à circulation nulle par rapport aux mouvements voisins à circulation constante; mais, comme plus haut, il y a néanmoins stabilité par rapport aux mouvements voisins à circulation nulle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Agostinelli C. - *Nuove forme delle equazioni del moto di un sistema analonomo.* Rend. di Matematica (1), vol. 8, Serie VI, 1975, p. 143-160.

[2] Capodanno P. - *Les équations d'Appell et d'Euler-Lagrange du mouvement d'un solide se déplaçant dans un fluide parfait incompressible en mouvement irrotationnel.* Matematica. Cluj (Roumanie), 21, (44), 1979, p. 1-19.

[3] Capodanno P. - *Sur le problème de l'intégration des équations du mouvement d'un profil au sein d'un fluide parfait incompressible en mouvement irrotationnel.* Matematica, 22 (45), 1980, p. 15-31.

[4] Capodanno P. - *On the analytical dynamics of profiles.* Proceedings of the IUTAM Symposium «Modern developments in analytical mechanics». Torino, 1982, vol. II, p. 461-480.

[5] Couchet G. - *Sur un cas d'intégration par quadratures du mouvement d'un profil au sein d'un fluide parfait incompressible en mouvement irrotationnel.* C.R. Acad. Sci. Paris, t. 258, 1964, p. 1722-1724.

[6] Couchet G. - *Les profils en aérodynamique instationnaire et la condition de joukowski.* Paris, Blanchard Ed., 1976.

[7] Malkin J.G. - *Theorie der Stabilität einer Bewegung.* Oldenburg. München, 1959.

[8] Rouche N., Habets P., Laloy M. - *Stability theory by Liapunov's direct method.* Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.

[9] Sedov L.I. - *Two-dimensional problems in hydrodinamics and aerodynamics.* Interscience Publishers. John Wiley and Sons. New York, London, Sydney, 1965.

Esempi di non-unicità in viscoelasticità lineare

GIANFRANCO CAPRIZ — Dipartimento di Matematica
EPIFANIO G. VIRGA — Facoltà di Ingegneria
Università di Pisa

1. Introduzione

In un lavoro ben noto [1] Fichera ha messo in evidenza situazioni critiche (nelle quali può mancare l'esistenza o l'unicità delle soluzioni) per il problema quasi-statico lineare di posto per materiali viscoelastici; le situazioni si presentano quando la memoria in quei materiali è relativamente tenace, per quanto alla lunga evanescente.

Da un esame degli esempi critici è sembrato a qualcuno che i guasti dipendano non tanto (o almeno non solo) dalla maggiore tenacità della memoria quanto da un suo carattere per così dire distorto, carattere peraltro proibito da principi termodinamici [2], [3]. E' stato anche proposto di esplorare comunque meglio il legame tra il problema dinamico completo e la sua linearizzazione; in particolare di vedere se le difficoltà non provengano dall'ipotesi di quasi-staticità del moto [4]. Per quest'ultimo scopo conviene, in prima istanza, porre a confronto con il problema quasi-statico un appropriato problema dinamico se pur ancora nell'ambito lineare. Ebbene, in questa nota noi mostriamo con esempi che l'abbandono dell'ipotesi di quasi-staticità non basta a sfuggire casi di incompatibilità, purché ci si permetta di trasgredire a certi dettami della termodinamica.

2. Premesse agli esempi

Con notazioni ovvie, l'equazione unidimensionale di moto di un corpo viscoelastico lineare omogeneo in presenza di forze distribuite di densità $\rho f(x, t)$ si scrive

$$\rho u_{tt}(x, t) = G(0)\, u_{xx}(x, t) + \int_0^\infty G'(s)\, u_{xx}(x, t-s)\, ds + \rho f(x, t) \; . \tag{2.1}$$

Si supporrà qui che x vari nell'intervallo $[0, l]$ e che agli estremi valgano le condizioni di posto

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \tag{2.2}$$

Si intende cercare soluzioni $u(x, t)$ di (2.1), (2.2) che, per ogni x in $[0, l]$, rimangano limitate su qualunque semiretta $t \in (-\infty, T)$. Non sembra siano ancora disponibili precisi teoremi che suggeriscano la più opportuna scelta delle "condizioni iniziali", cioè delle condizioni asintotiche per $t \to -\infty$ da associare a (2.1), (2.2). Qui si supporrà che per $t \to -\infty$ u decada a zero almeno esponenzialmente.

$$\sup e^{-\eta t} |u(x, t)| < +\infty \quad , \quad \text{per qualche} \quad \eta > 0. \tag{2.3}$$

Per quanto riguarda la funzione di rilassamento $G(s)$ si supporrà che essa sia limitata e di classe C^1, mandi $[0, +\infty)$ in R^+

$$G(s) > 0 \; , \quad \text{per ogni} \quad s \in [0, +\infty) \; , \tag{2.4}$$

ed inoltre sia tale da assicurare l'integrabilità di $sG'(s)$ in $(0, +\infty)$

$$\left| \int_0^\infty s\, G'(s)\, ds \right| < +\infty \; . \tag{2.5}$$

Ebbene noi mostreremo che esistono scelte di $G(s)$ soddisfacenti alle (2.4), (2.5) per cui il problema (2.1), (2.2), (2.3) con $f \equiv 0$ ammette, in prossimità di condizioni quasi-statiche (intendendo: "per ρ sufficientemente piccolo"), anche soluzioni non identicamente nulle.

Precisamente, posto

$$\rho = \rho_0\, \epsilon \; ,$$

con ρ_0 positivo ed ϵ parametro di perturbazione anch'esso positivo, esistono, per tutta una classe di funzioni $G(s)$, soluzioni di (2.1), (2.2), (2.3) del tipo

$$u(x, t) = u_0 \sin(\pi x / l)\, e^{\lambda t} \; , \qquad Re\, \lambda > 0 \; . \tag{2.6}$$

per ϵ sufficientemente piccolo positivo; qui u_0 è una costante. Soluzioni

del tipo (2.6) già soddisfano alle (2.2), (2.3); perché soddisfino anche alla (2.1) deve valere la relazione in λ

$$\rho_0 (l/\pi)^2 \epsilon \lambda^2 + G(0) + \int_0^\infty G'(s) e^{-\lambda s} ds = 0 \ , \qquad Re \lambda > 0 \ . \tag{2.7}$$

Noi cercheremo soluzioni di (2.7) della forma

$$\lambda(\epsilon) = i \lambda_0 + \epsilon \lambda_1 + \epsilon i \lambda_2 + o(\epsilon) \tag{2.8}$$

con λ_0 reale non nullo, λ_1 positivo e λ_2 qualunque. Dovrà essere

$$\begin{aligned} & G(0) + \int_0^\infty G'(s) \cos \lambda_0 s \, ds = 0 \ , \\ & \int_0^\infty G'(s) \sin \lambda_0 s \, ds = 0 \ , \end{aligned} \tag{2.9}$$

ed inoltre

$$\rho_0 (l/\pi)^2 \lambda_0^2 + (\lambda_1 + i\lambda_2) \int_0^\infty s G'(s) e^{-i\lambda_0 s} ds = 0 \ . \tag{2.10}$$

Perché la (2.10) possa essere soddisfatta dovremo supporre che

$$\int_0^\infty s G'(s) e^{-i\lambda_0 s} ds \neq 0 \ . \tag{2.11}$$

Ammessa l'esistenza di una soluzione λ_0 delle (2.9) che verifichi anche la (2.11), il teorema del Dini ci assicura dell'esistenza di una funzione $\lambda(\epsilon)$ di classe C^1, soluzione di (2.7) con la proprietà (2.8) in un opportuno intorno di $\epsilon = 0$. Perché a $\lambda(\epsilon)$ corrisponda una soluzione della forma (2.6), richiederemo infine che $\lambda_1 > 0$, ossia che

$$\int_0^\infty s \, G'(s) \cos \lambda_0 s \, ds < 0. \tag{2.12}$$

Si osservi che, se esistono soluzioni delle (2.9) soddisfacenti alla (2.12), esse sono in numero pari: a ciascuna si accompagna, infatti, la sua opposta.

In conclusione esistono soluzioni non nulle di (2.1), (2.2) e (2.3) con $f \equiv 0$, se la funzione di rilassamento $G(s)$ è tale che

(1) valgano le (2.3), (2.5),

(2) esista un λ_0 soluzione di entrambe le (2.9),

(3) siano di conseguenza soddisfatte le (2.11), (2.12).

3. Gli esempi

Va osservato che le (2.9) non ammettono soluzione quando si accettino le seguenti ipotesi che ricorrono frequentemente:

$$G'(s) \leqslant 0 \quad \text{per ogni} \quad s \geqslant 0 \ , \tag{3.1}$$

$$G(\infty) = \lim_{s \to \infty} G(s) > 0 \ . \tag{3.2}$$

Infatti allora la $(2.9)_1$ implica

$$G(0) = \left| \int_0^\infty G'(s) \cos \lambda_0 s \, ds \right| \leqslant \int_0^\infty |G'(s)| \, ds = G(0) - G(\infty) \ ,$$

in contraddizione con (3.2).

Viceversa, per altre scelte di $G(s)$, soluzioni delle (2.9), (2.12) esistono. Ad esempio la funzione di rilassamento proposta da Fichera [5]

$$G(s) = G_0 \, (1 - 2 \, \mu s \, e^{-\mu s}) \ , \tag{3.3}$$

con μ reale positivo, soddisfa a tutti tre i requisiti elencati alla fine del precedente paragrafo. Infatti si tratta di una funzione sempre positiva in $[0, +\infty)$, per cui vale anche la (2.5); le (2.9) possono venir soddisfatte con una delle due scelte $\lambda_0 = \pm \mu$ e (2.10) è esplicitabile in λ_1 (e conduce al corretto segno di $Re \, \lambda$ perché sono soddisfatte entrambe le (2.11), (2.12)):

$$\lambda_1 = \rho_0 \, l^2 \mu^3 / \pi^2 \, G_0 > 0 \ . \tag{3.4}$$

Un altro esempio è fornito dalla funzione

$$G(s) = (G_\infty + 2\,G_0)\,e^{-2\mu s} - (2\,G_\infty + G_0)\,e^{-\mu s}\,, \tag{3.5}$$

ove

$$\mu > 0 \quad e \quad 4\,G_\infty > G_0 > 0\,.$$

Infatti le (2.9) sono soddisfatte con una delle due scelte alternative

$$\lambda_0 = \pm\,\mu\,(2G_\infty/G_0)^{1/2}\,,$$

ed inoltre risulta

$$\int_0^\infty s\,G'(s)\cos\lambda_0 s\,ds = -6\,G_0^2\,G_\infty/[\mu(2G_0 + G_\infty)(G_0 + 2G_\infty)]\,,$$

in modo che anche la (2.12) è verificata.

Purtroppo questi esempi di non unicità contrastano con il secondo principio della termodinamica. Richiedendo la proprietà di Clausius [6] per particolari deformazioni cicliche di un corpo viscoelastico isotermo, si constata [2] [3] che deve essere soddisfatta la disuguaglianza di Graffi [7]

$$\Gamma(\omega) = \int_0^\infty G'(s)\sin\omega s\,ds \leqslant 0\,, \qquad \text{per ogni} \quad \omega \geqslant 0\,, \tag{3.6}$$

che non è compatibile con $(2.9)_2$ e (2.12). Infatti, mentre per $(2.9)_2$ la funzione Γ ha uno zero in $\lambda_0 \neq 0$, (2.12) richiede $\Gamma'(\lambda_0) < 0$, in contraddizione con (3.6) che vorrebbe almeno $\Gamma'(\lambda_0) = 0$.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] FICHERA G. - *Avere una memoria tenace crea gravi problemi*, Arch. Rational Mech. Anal., **70** (1979), 101-112.

[2] FABRIZIO M. & MORRO A. - *Thermodynamic restrictions on relaxation functions in linear viscoelasticity*, Mech. Res. Comm., **12** (1985), 101-105.

[3] MORRO A. - *Constitutive relations in thermoelasticity*, Atti del Convegno di Termoelasticità Finita, Accademia Nazionale dei Lincei, 1985.

[4] CAPRIZ G. - *Soluzioni quasi-statiche in viscoelasticità*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. Natur., **68** (1980), 507-513.

[5] FICHERA G. - *Sul principio della memoria evanescente*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **68** (1982), 245-259.

[6] COLEMAN B.D. & OWEN D.R. - *A mathematical foundation for thermodynamics,* Arch. Rational Mech. Anal., **54** (1974), 1-104.

[7] GRAFFI D., *Sopra alcuni fenomeni ereditari dell'elettrologia*, Rend. Ist. Lombardo Sc. Lett., **68-69** (1936), 124-139.

Sulla formulazione relativa dell'elettrodinamica in relatività generale (*)

GIOVANNI CRUPI
Dipartimento di Matematica - Università di Messina

Sunto. *In questo lavoro si dimostra come la tecnica delle proiezioni di Cattaneo fornisce un metodo lineare e fisicamente espressivo per la formulazione relativa dell'elettrodinamica in Relatività generale.*

Summary. *In this paper we show that the projective technique proposed by Cattaneo provides a simple as well as physically expressive method to the relative formulation of the electrodynamics in general relativity.*

Per ciò che è a me noto, la formulazione relativa in Relatività generale delle equazioni elettrodinamiche si conduce seguendo un metodo analogo a quello che si adotta in relatività ristretta, allorché si passa dalla formulazione tensoriale nello spazio di Minkowski a quella maxvelliana relativa ad un assegnato riferimento inerziale [1].

Tale procedimento, in Relatività generale, oltre a presentarsi piuttosto laborioso, lascia in ombra la fondamentale distinzione tra riferimento fisico e sistema di coordinate. Com'è noto, anche in Relatività generale, in uno stesso riferimento fisico possono essere introdotti infiniti sistemi di coordinate adattate (o fisicamente ammissibili) [2].

La distinzione dei ruoli tra riferimento fisico e sistema di coordinate ad esso associato si manifesta ben chiara nello schema delle proiezioni naturali di Cattaneo.

Nel presente lavoro si mostra come i metodi di Cattaneo rendono estremamente semplice e lineare la formulazione relativa dell'elettrodinamica in Relatività generale.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività di ricerca del C.N.R. (G.N.F.M.) e M.P.I. fondi di ricerca 60%.

2. - Consideriamo una varietà riemanniana spazio-temporale curva, V^4, riferita ad un sistema di coordinate locali generali (x^i) e dotata in ogni punto di una metrica iperbolica normale

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

di segnatura $+++-$; le (x^α) $(\alpha = 1, 2, 3)$ indicano coordinate spaziali ed $x^4 = ct$ fornisce la coordinata temporale.

Com'è noto, in V^4, le equazioni tensoriali dell'elettrodinamica sono suscettibili della forma

$$\nabla_i F_{kl} + \nabla_l F_{ik} + \nabla_k F_{li} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla_k F^{ik} = s^i \tag{3}$$

dove ∇_i indica l'operatore di derivazione covariante, F_{ik} le componenti covarianti del tensore elettromagnetico ed s^i le componenti controvarianti della quadridensità di corrente.

La (2) può essere anche scritta, più espressivamente, nella forma

$$E^{sikh} F_{kh/i} = 0 \tag{4}$$

oppure

$$E^{sikh}\, \partial_i F_{kh} = 0 \qquad \left(\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \tag{5}$$

3. - Un riferimento fisico in V^4 resta caratterizzato da un campo di vettori unitari γ di specie temporale $(\gamma \cdot \gamma = -1)$; e lo spazio tangente T_x associato al generico punto (x^i) può essere decomposto nella somma di due sottospazi supplementari ed ortogonali tra loro:

$$T_x = \Sigma + \theta \tag{6}$$

dove θ è unidimensionale e parallelo a $\gamma(x^i)$, Σ è tridimensionale ed ortogonale a $\gamma(x^i)$. E' appena necessario ricordare che θ e Σ rappresentano *localmente* tempo e piattaforma spaziale relativi al riferimento fisico individuato dal campo γ.

Dare alle equazioni elettromagnetiche forma relativa ad un assegnato

riferimento fisico, in Relatività generale, significa esplicitare l'aspetto che assumono localmente le proiezioni delle equazioni quadridimensionali (2) e (3) sulla base spaziale Σ e lungo la linea temporale θ.

E' della ricerca di queste proiezioni che ora vogliamo occuparci, applicando la tecnica delle proiezioni di Cattaneo.

Richiamiamo che, nell'ambito di tale tecnica, introdotto un sistema di coordinate fisicamente ammissibili, si costruiscono i due tensori

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_{ik} &= g_{ik} + \gamma_i \gamma_k \\ \nu_{ik} &= -\gamma_i \gamma_k \end{aligned} \right. \tag{7}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \gamma_i = \frac{g_{i4}}{\sqrt{-g_{44}}} \\ & \gamma^\alpha = 0 \quad , \quad \gamma^4 = \frac{1}{\sqrt{-g_{44}}} \end{aligned} \right. . \tag{8}$$

Il tensore γ_{ik}, che viene chiamato "*proiettore spaziale*", permette di effettuare le proiezioni sulla piattaforma spaziale Σ, ed il tensore ν_{ik}, detto "*proiettore temporale*", consente di costruire le proiezioni sulla linea θ.

Procediamo, adesso, al calcolo della proiezione spaziale dell'equazione (5).

Per motivi di semplicità, nel seguito, svilupperemo i calcoli in un riferimento tempo-ortogonale.

In tale riferimento:

$$\gamma_\alpha = \frac{g_{\alpha 4}}{\sqrt{-g_{44}}} = 0 \quad . \tag{9}$$

La proiezione spaziale della generica componente della (5) è data da

$$\gamma_r^s E^{rikh} \partial_i F_{kh} = 0 \ , \tag{10}$$

dove

$$\gamma_r^s = \delta_r^s + \gamma_r \gamma^s \quad . \tag{11}$$

La (10) può essere trascritta nella forma

$$\gamma_\alpha^s E^{\alpha i k h} \partial_i F_{kh} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \quad , \tag{12}$$

essendo $\delta_4^s = 0$, perché il tensore γ_r^s è di tipo spaziale.

Inoltre, dopo la (11) e la (9),

$$\gamma_\alpha^s = \delta_\alpha^s \tag{13}$$

e quindi, tenendo conto che $\gamma_\alpha^4 = \delta_\alpha^4 = 0$, la (12) è riconducibile alla

$$E^{\beta i k h} \partial_i F_{kh} = 0 \qquad (\beta = 1, 2, 3) \quad . \tag{14}$$

Da questa, per $\beta = 1, 2, 3$, si deducono le equazioni

$$\begin{cases} \partial_2 F_{34} - \partial_3 F_{24} + \partial_4 F_{23} = 0 \\ \partial_3 F_{14} - \partial_1 F_{34} + \partial_4 F_{31} = 0 \\ \partial_1 F_{24} - \partial_2 F_{14} + \partial_4 F_{12} = 0 \quad . \end{cases} \tag{15}$$

Allo scopo di dare una rigorosa interpretazione relativa alle (15), applichiamo l'operazione di decomposizione naturale, secondo Cattaneo [2], al tensore elettromagnetico F_{ik} .

Così, si ha:

$$F_{ik} = \widetilde{F}_{ik} + \widetilde{F}_i \gamma_k - \gamma_i \widetilde{F}_k \tag{16}$$

dove

$$\widetilde{F}_{ik} = \gamma_i^r \gamma_k^s F_{rs} \tag{17}$$

$$\widetilde{F}_i = - \gamma_i^r \gamma^s F_{rs} \tag{18}$$

sono tensori spaziali appartenenti alla base Σ.

Da (16) o da (17), in coordinate tempo-ortogonali, si deduce

$$F_{\alpha\beta} = \widetilde{F}_{\alpha\beta} \quad . \tag{19}$$

E questa ci permette di affermare che le quantità

$$F_{32} \ , \ F_{13} \ , \ F_{21} \ , \tag{20}$$

che figurano nelle (15), sono suscettibili di essere considerate come le componenti significative ed indipendenti di un tensore dello spazio tridimensionale Σ di metrica:

$$d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \ . \tag{21}$$

In Σ al tensore emisimmetrico $\widetilde{F}_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}$, si può associare lo pseudovettore duale, definito da

$$B^\nu = \frac{1}{2} E^{\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad , \tag{22}$$

dove $E^{\nu\alpha\beta}$ è lo pseudo-tensore di Ricci associato allo spazio Σ. Da (22), per $\nu = 1, 2, 3$, si trae

$$B^1 = \frac{F_{23}}{\sqrt{\gamma}} \quad , \quad B^2 = \frac{F_{31}}{\sqrt{\gamma}} \quad , \quad B^3 = \frac{F_{12}}{\sqrt{\gamma}} \tag{23}$$

con

$$\gamma = \det \| \gamma_{\alpha\beta} \| \quad . \tag{24}$$

Il vettore tridimensionale **B**, per estensione di linguaggio, possiamo chiamarlo vettore induzione magnetica.

Esaminiamo, ora, la relazione

$$F_{\alpha 4} = \widetilde{F}_\alpha\ \gamma_4 \tag{25}$$

che si trae dalla (16) per $i = \alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) e $k = 4$.

Com'è noto, le $\widetilde{F}_\alpha$ possono essere concepite come le componenti covarianti di un vettore tridimensionale appartenente allo spazio Σ.

Inoltre, osserviamo che una trasformazione puramente spaziale di

coordinate che riguardi i punti di Σ, è suscettibile di essere espressa nella forma

$$(26) \qquad \begin{cases} x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^1, x^2, x^3) \\ x^{4'} = x^4 \ . \end{cases}$$

E questa rappresenta una trasformazione "*interna*" al riferimento fisico. E' facile verificare che in una trasformazione del tipo (26) la γ_4 si comporta come una quantità invariante. Allora, le $F_{\alpha 4}$ per $\alpha = 1, 2, 3$, si possono concepire come le componenti covarianti di un vettore tridimensionale appartenente alla base spaziale Σ.

Poniamo,

$$(27) \qquad E_\alpha = F_{\alpha 4} \ .$$

Per naturale estensione di ciò che è noto in Relatività ristretta, chiameremo E_α intensità del campo elettrico in Σ .

Incidentalmente, osserviamo che, al vettore tridimensionale $\widetilde{F}_\alpha$ può essere attribuito un esplicito significato fisico. Infatti, dopo la (27) e la $(8)_1$, da (25) si trae

$$(28) \qquad -\widetilde{F}_\alpha = \frac{E_\alpha}{\sqrt{-g_{44}}} \ .$$

Adesso, avendo interpretato le E_α come componenti covarianti del trivettore intensità del campo elettrico in Σ, sembra del tutto naturale concepire le quantità $E_\alpha / \sqrt{-g_{44}}$, proporzionali ad E_α, come componenti del trivettore spostamento elettrico **D**, cioè

$$(29) \qquad D_\alpha = \frac{E_\alpha}{\sqrt{-g_{44}}} \ .$$

Quindi, la (28) assume la forma

$$(30) \qquad -\widetilde{F}_\alpha = D_\alpha$$

e questa ci consente, appunto, di interpretare il trivettore $\widetilde{F}_\alpha$ come l'opposto del vettore spostamento elettrico **D** .

La (29) coincide con una nota relazione [3].

Dopo la (27) e le (23), le (15) possono essere sintetizzate nella

$$E^{\alpha\beta\nu}\ \partial_\beta E_\nu + \frac{1}{c\sqrt{\gamma}}\ \partial_t (\sqrt{\gamma}\, B^\alpha) = 0$$

oppure

$$\text{(31)} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c\sqrt{\gamma}}\ \partial_t (\sqrt{\gamma}\, \mathbf{B}).$$

La proiezione temporale di (5) conduce all'equazione

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\ \partial_\alpha (\sqrt{\gamma}\, B^\alpha) = 0 \ ,$$

che può essere trascritta nella forma:

$$\text{(32)} \qquad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \ .$$

Le proiezioni, spaziale e temporale, di (3) forniscono, rispettivamente:

$$\text{(33)} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}\, c}\ \partial_t (\sqrt{\gamma}\ \mathbf{D}) + \rho \mathbf{u}/c$$

$$\text{(34)} \qquad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

con evidente significato dei simboli.

I dettagli sulle deduzioni formali e sulle interpretazioni delle (32), (33) e (34), qui omesse per brevità, saranno oggetto di una successiva pubblicazione.

Le equazioni (31), (32), (33) e (34) sostanzialmente coincidono con quelle riportate dal Møller [4].

Il contributo di questo lavoro, preminentemente, consiste nell'aver mostrato che la tecnica delle proiezioni di Cattaneo fornisce, tra l'altro, un metodo lineare e fisicamente espressivo anche nella formulazione relativa dell'elettro-dinamica in Relatività generale.

Da recenti indicazioni, cortesemente fornitemi da D. Galletto, ho appreso – dopo la presentazione di questo lavoro – che della medesima problematica si è già occupato P. Benvenuti [5].

Nel ringraziare vivamente il collega Galletto, mi propongo, in un prossimo lavoro, di riprendere la ricerca anche nell'ambito di un'interessante confronto con le assunzioni e con i risultati di Benvenuti.

BIBLIOGRAFIA

[1] Möller C. - *The Theory of Relativity*, pp. 415-419, Second Edition, Oxford University Press, 1977.

[2] Cattaneo - *Introduzione alla teoria einsteiniana della gravitazione*, Cap. VII, Libreria Eredi V. Veschi, Roma.

[3] Möller C. - loc. cit., p. 418.

[4] Möller C. - loc. cit., p. 419.

[5] Benvenuti P. - Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Sez. III, vol. XIV (1960), pp. 171-193.

Sui modelli d'universo di Friedmann (*)

DIONIGI GALLETTO - BRUNO BARBERIS
Istituto di Fisica Matematica «J.-Louis Lagrange»
Università di Torino
Via Carlo Alberto 10 - 10123 TORINO

Sommario. *Le considerazioni svolte in precedenti lavori (si veda, ad es.* [3], [4], [6], [8] *e gli ulteriori risultati e precisazioni contenuti in* [10]) *relative al modello d'universo di Einstein-de Sitter vengono per la maggior parte estese per sommi capi al caso in cui lo spazio fisico sia* massimamente simmetrico. *Su esso è possibile sviluppare una meccanica di tipo newtoniano e introdurre dei riferimenti, i* riferimenti naturali, *analoghi a quelli introdotti nei lavori sopra citati. Il principio di sovrapposizione delle forze simultanee permette di dedurre l'equazione di evoluzione per il fluido cosmologico senza far ricorso ad alcuna teoria della gravitazione. L'intervento della proprietà della velocità della luce di essere indipendente dalla sorgente che la emette, unitamente alla legge di composizione delle velocità della meccanica classica, permette di dedurre che la metrica dello spazio-tempo è necessariamente espressa dalla metrica di Robertson-Walker. Ne segue che per questa via, che fa capo alla meccanica classica, si possono dedurre tutte le relazioni cinematiche che sino ad oggi si sono ottenute operando sistematicamente nell'ambito della relatività generale, come la formula che lega lo spostamento delle righe spettrali verso il rosso all'espansione dell'Universo, le relazioni che definiscono gli orizzonti, ecc. Dalle considerazioni svolte segue inoltre che la forma tensoriale dell'equazione di evoluzione e dell'integrale dell'energia è necessariamente espressa dalle equazioni gravitazionali della teoria della relatività generale, con la conclusione che la trattazione che viene delineata nel presente lavoro porta necessariamente ai celebri modelli relativistici d'universo di Friedmann, che vengono qui costruiti partendo unicamente dall'ipotesi che l'Universo sia omogeneo e isotropo e dalla proprietà sopra richiamata della velocità della luce.*

Abstract. *Most of the considerations developed in previous papers (see, e.g.,* [3], [4], [6], [8] *and the further results and specifications contained in* [10]) *concerning the Einstein-de Sitter model of the Universe are briefly extended to the case in which the physical space is a* maximally symmetric space. *In it it is possible to introduce a class of frames of reference (the class of the* natural frames of reference*). which is analogous to the class of frames introduced in the above-mentioned papers,*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.

and to develop in it Newtonian mechanics. The principle of superposition of simultaneous forces permits us to deduce the equation of evolution of the cosmological fluid without making recourse to any gravitational theory. The intervention of the property of the velocity of light of being independent of its source, together with the Galilean law of addition of velocities, permits us to deduce that the metric of space-time is necessarily given by the Robertson-Walker metric. Resorting to the Galilean law of addition of velocities it is possible to deduce all the kinematical relations which have been obtained until now working always within the corpus of general relativity: the formula relating the red-shift and the expansion of the Universe, the relations defining the horizons, etc. Moreover, from the considerations made it follows that the tensorial form of the equation of evolution and of the energy integral is necessarily given by the gravitational equations of the general theory of relativity. This leads to the conclusion that the treatment outlined in the present paper necessarily leads to the famous Friedmann relativistic models of the Universe, which are here built starting only from the hypotheses that the Universe is homogeneous and isotropic and from the above-mentioned property of the velocity of light.

1. - Nelle considerazioni che seguono si assumerà che l'Universo si mantenga nel tempo omogeneo e isotropo. Assumendo come schema per l'Universo quello della materia disgregata, ciò comporta che l'Universo sia schematizzabile in un fluido $\mathscr{U}$ omogeneo e privo di sforzi interni e che lo spazio fisico, al quale si intende esteso $\mathscr{U}$, sia uno *spazio tridimensionale massimamente simmetrico* (cfr. [14], 13).

Introdotto nello spazio fisico un sistema di coordinate y^i e indicata la metrica con

$$(1) \qquad d\sigma^2 = g_{ij}\, dy^i\, dy^j \ ,$$

la condizione che lo spazio fisico sia a curvatura costante si traduce, come è ben noto, nella condizione che il tensore di Riemann-Christoffel R_{hkij} sia legato al tensore fondamentale g_{hk} da

$$R_{hkij} = \epsilon\,(g_{hi}\, g_{kj} - g_{hj}\, g_{ki}) \ ,$$

con ϵ (curvatura riemanniana) costante. E, come è ben noto, si può sempre scegliere un sistema di coordinate, che verranno ancora indicate con y^i, in corrispondenza alle quali la metrica (1) assume la forma

$$d\sigma^2 = \frac{R^2(t)}{\left(1 + \epsilon \frac{r^2}{4}\right)^2} \sum_1^3{}_i (dy^i)^2 , \tag{2}$$

con

$$r^2 = \sum_1^3{}_i (y^i)^2 ,$$

con $R(t)$ indipendente dalle coordinate y^i e con ϵ che si riduce a 1, -1, 0 a seconda che la curvatura sia positiva, negativa o nulla.

Ad esempio, nel caso in cui sia $\epsilon = 1$, ossia nel caso in cui lo spazio fisico sia un'ipersfera, R è il raggio dell'ipersfera e la metrica (2) è quella che si ottiene per detto spazio tramite la proiezione stereografica dell'ipersfera da un qualsaisi suo punto N sull'iperpiano tangente ad essa nel punto O diametralmente opposto a N e riferito a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x^i con origine in O: in tal caso per le coordinate y^i risulta

$$y^i = \frac{x^i}{R(t)} . \tag{3}$$

2. - Escludendo, in accordo con l'osservazione astronomica, il caso in cui l'Universo risulti statico, segue che R varia con il tempo, mentre le coordinate y^i dei punti dello spazio fisico si mantengono indipendenti dal tempo, e tali pertanto si mantengono in corrispondenza agli elementi del fluido $\mathscr{U}$, stante l'omogeneità e l'isotropia di questo. Esse hanno quindi per gli elementi di $\mathscr{U}$ carattere *lagrangiano* e, in quanto tali e in accordo con la terminologia corrente in cosmologia, verranno chiamate *coordinate comobili.*

Accanto alle coordinate y^i si possono introdurre le coordinate *euleriane* x^i, definite da (3), ossia da

$$x^i = R(t)\, y^i .$$

Con la sostituzione

$$y^1 = r \sin\vartheta \cos\varphi , \quad y^2 = r \sin\vartheta \sin\varphi , \quad y^3 = r \cos\vartheta ,$$

la metrica (2) assume la forma

$$(4) \qquad d\sigma^2 = \frac{R^2(t)}{\left(1 + \epsilon \frac{r^2}{4}\right)^2} \left[dr^2 + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\right)\right] ,$$

dove ora il ruolo di coordinate comobili è svolto dalle coordinate polari r, ϑ, φ.

Nel caso in cui sia $\epsilon = 1$, introdotta la nuova variabile angolare ω definita da

$$(5) \qquad \omega = 2 \operatorname{arctg} \frac{r}{2} ,$$

la metrica (4) diventa

$$(6) \qquad d\sigma^2 = R^2(t) \left[d\omega^2 + \sin^2\omega \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\right)\right] .$$

Nel caso in cui sia invece $\epsilon = -1$, introdotta la nuova variabile ω definita da

$$(5') \qquad \omega = 2 \operatorname{setth} \frac{r}{2} ,$$

la metrica (4) diventa

$$(6') \qquad d\sigma^2 = R^2(t) \left[d\omega^2 + \sinh^2\omega \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\right)\right] .$$

Nelle metriche (6), (6′) il ruolo di coordinate comobili è svolto dalle coordinate $\omega, \vartheta, \varphi$.

3. - Da quanto ora brevemente riassunto segue facilmente il significato fisico da attribuire alla coordinata radiale comobile ω: essa, moltiplicata per $R(t)$, fornisce all'istante t la distanza (*distanza propria*) a cui si trova un elemento qualsiasi di $\mathcal{U}$ dall'origine del sistema di coordinate. Detta distanza, come non è difficile constatare, è la lunghezza dell'arco di geodetica che congiunge la suddetta origine con l'elemento considerato.

Nel caso in cui sia $\epsilon = 0$ (caso in cui lo spazio fisico sia euclideo),

la suddetta distanza propria all'istante t, come è implicito nelle considerazioni che precedono, è fornita da $R(t)r$.

Considerata una qualsiasi quaterna di elementi del fluido $\mathcal{U}$, questa, tramite le geodetiche che congiungono uno dei suoi elementi, assunto come origine, con i restanti tre, individua un riferimento per detto fluido che verrà chiamato *riferimento naturale* e che verrà indicato con $\mathcal{R}_O$, dove con O si è indicato l'elemento assunto come origine. Comunque considerato un elemento P di $\mathcal{U}$, la sua distanza propria da O all'istante t, per quanto ora visto, è espressa da

$$\rho = R(t)\,\omega \tag{7}$$

(con $\omega = r$ nel caso in cui sia $\epsilon = 0$), da cui si ottiene subito, indicando con v la velocità scalare di P rispetto a $\mathcal{R}_O$:

$$v = \frac{\dot{R}}{R}\rho \ , \tag{8}$$

relazione che esprime proprio, come è naturale stante le premesse fatte, la *legge di Hubble.* Il *parametro di Hubble* $h(t)$ risulta espresso da

$$h(t) = \frac{\dot{R}}{R} \ . \tag{9}$$

Da (8) segue che per l'accelerazione scalare a risulta

$$a = (\dot{h} + h^2)\,\rho \ . \tag{10}$$

Stante le considerazioni svolte, *i risultati* (8), (9) *e* (10) *sussistono non soltanto rispetto al riferimento naturale* $\mathcal{R}_O$, *ma rispetto ad ogni riferimento naturale*, nel senso che, comunque considerato un altro riferimento naturale $\mathcal{R}_{O'}$, risulta

$$v' = h(t)\,\rho' \ ,$$

$$a' = (\dot{h} + h^2)\,\rho' \ ,$$

con ρ' distanza propria dell'elemento P dall'origine O' di $\mathcal{R}_{O'}$, ecc.

4. - Osservando che la meccanica newtoniana si può formulare e sviluppare anche in uno spazio tridimensionale a curvatura costante, con considerazioni che nella presente esposizione per brevità vengono tralasciate e per le quali si rinvia a un successivo lavoro di prossima pubblicazione, tramite l'intervento del principio di sovrapposizione delle forze simultanee e, in pieno accordo con i fondamenti stessi della meccanica classica, escludendo la possibilità che in assenza di materia si possano originare forze agenti su un qualsiasi elemento P di $\mathscr{U}$, si può a questo punto dedurre che, qualunque sia il riferimento naturale $\mathscr{R}_O$, risulta

$$a = -\frac{4}{3}\pi k \mu \rho \quad , \tag{11}$$

con k costante, risultato che mantiene immutata la sua forma in ogni riferimento naturale e che segue unicamente dal principio di sovrapposizione delle forze simultanee, senza l'intervento di alcuna specifica teoria della gravitazione.

Da (11), ricordando (7), segue poi

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4}{3}\pi k \mu \quad , \tag{12}$$

che è l'equazione che regola l'evoluzione del fluido $\mathscr{U}$, o, se si vuole, l'equazione di evoluzione per l'Universo.

Si può pertanto affermare che *l'equazione di evoluzione di $\mathscr{U}$ segue dalle sole ipotesi che esso sia omogeneo e isotropo e dai principi della meccanica classica, senza far ricorso ad alcuna teoria della gravitazione.*

Qualunque sia il riferimento naturale $\mathscr{R}_O$, la parte di $\mathscr{U}$ contenuta nella sfera di centro O e raggio $R(t)$ (ossia entro la superficie materiale costituita dagli elementi la cui distanza propria da O è uguale a $R(t)$) risulta di massa invariabile, il che comporta

$$\mu R^3 = \text{cost.} \tag{13}$$

e da cui segue

$$\frac{\dot{R}}{R} + \frac{1}{3}\frac{\dot{\mu}}{\mu} = 0 \quad . \tag{14}$$

Da (12) e (13) si ottiene poi

$$(15) \qquad \frac{1}{2}\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{4}{3}\pi k \mu + \frac{\alpha}{R^2} \ ,$$

dove la costante di integrazione α si può interpretare come il valore dell'energia meccanica che competerebbe all'elemento P, pensato dotato di massa unitaria, qualora fosse situato a distanza $R(t)$ dall'origine del riferimento rispetto al quale si considera il suo moto. E infatti, posto $\frac{4}{3}\pi k \mu R^3 = M$, dove, stante (13), M è costante, l'equazione (15) si può scrivere

$$(15') \qquad \frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{M}{R} = \alpha \ ,$$

ecc. Le interessanti osservazioni e conseguenze che si possono dedurre da (15') – o direttamente da (12) – verranno sviluppate nel lavoro sopra preannunciato che avrà come scopo l'approfondimento e l'ampliamento del presente.

Da (12) e (15) segue poi

$$(16) \qquad 2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} = 2\frac{\alpha}{R^2} \ ,$$

che è l'equazione esplicita del moto di P, supposto a distanza $R(t)$ dall'origine del riferimento rispetto al quale si considera il suo moto, espressa unicamente tramite $R(t)$ e le sue derivate.

Le equazioni (14) (equazione di continuità) e (16) (equazione di evoluzione di $\mathcal{U}$, o, se si vuole, dello spazio fisico a cui si estende $\mathcal{U}$), unitamente all'equazione (15) (integrale dell'energia), costituiscono le equazioni che sono alla base della cosmologia newtoniana nel caso generale in cui lo spazio fisico sia massimamente simmetrico. Esse sono state qui dedotte (sia pure per sommi capi) senza far ricorso ad alcuna teoria

della gravitazione, ma unicamente alle ipotesi fatte su $\mathcal{U}$ (omogeneità e isotropia), oltre che ai principi della meccanica. Esse sono analoghe a quelle che si ottengono nell'ambito relativistico, e l'analogia non è soltanto formale ma sostanziale, nel senso che esse sono proprio le stesse che si ottengono operando nel suddetto ambito, come verrà precisato al n. 9.

5. - Prima di procedere oltre è il caso di rilevare esplicitamente che l'ipotesi che $\mathcal{U}$ risulti omogeneo implica l'esistenza, non solo nel contesto newtoniano, di un tempo universale, il cosiddetto "tempo cosmico" (cfr., ad es., [2], 8.2; [14], 14.1; [11], VII,1; ecc.). Ciò premesso, la proprietà della luce messa in evidenza dall'esperienza di Michelson e Morley implica che la velocità della luce emessa da una qualsiasi galassia, misurata dalla Terra, sia indipendente dalla galassia considerata, cioè che sia la stessa per qualsiasi galassia.

Supponendo che a ciascun elemento del fluido $\mathcal{U}$ sia associata una sorgente luminosa, quanto ora richiamato si traduce, nello schema adottato per l'Universo nella presente esposizione, nell'esistenza di un riferimento, che verrà indicato con $\mathcal{R}_O$, tale che, considerato un qualsiasi fotone F' emesso da un qualsiasi elemento O' di $\mathcal{U}$ e diretto verso O, che transiti per O all'istante t, la velocità di detto fotone misurata da O (naturalmente all'istante t) è indipendente da O'. Detta velocità verrà chiamata *velocità locale della luce rispetto al riferimento naturale* $\mathcal{R}_O$ nell'istante t.

Come segue dalle considerazioni riassunte ai nn. 3 e 4, risultando il riferimento naturale $\mathcal{R}_O$ indistinguibile da un qualsiasi altro riferimento naturale $\mathcal{R}_{O'}$ agli effetti del moto del fluido omogeneo $\mathcal{U}$, non sussistono affatto ragioni per ritenere che, considerato un secondo fotone F emesso da O nel medesimo istante in cui O' ha emesso F' e diretto verso O', F raggiunga O' in un istante diverso dall'istante t in cui F' raggiunge O. In altri termini, non sussistono ragioni per cui i suddetti due fotoni percorrano i rispettivi tragitti con leggi diverse. Ne segue che la velocità di F misurata da O' nell'istante t in cui F transita per esso non può differire dalla velocità di F' misurata da O nel medesimo istante.

Stante l'arbitrarietà di O', si può quindi concludere che *la velocità locale della luce nell'istante t risulta essere la stessa rispetto a tutti i riferimenti naturali.* Essa verrà ritenuta indipendente dal tempo, ossia, come in tutte le trattazioni, essa verrà ritenuta una costante universale, che, come al solito, verrà indicata con c.

6. - Ritenendo ora che il riferimento naturale $\mathcal{R}_O$ sia nuovamente qualsiasi, comunque si consideri l'elemento P di $\mathcal{U}$ sulla traiettoria del fotone F, per la velocità di F rispetto al riferimento naturale $\mathcal{R}_P$ (misurata quindi nell'istante t_P in cui F transita per P) risulta, stante quanto ora visto, ricorrendo alla legge di composizione delle velocità della meccanica classica e ricordando (8):

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_P - \frac{\dot{R}(t_P)}{R(t_P)} \rho_P = c \ ,$$

con il significató dei simboli evidente. Risulta cioè

$$\frac{d\rho(t)}{dt} - \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \rho(t) = c \ , \tag{17}$$

ossia, ricordando (7):

$$R(t) \frac{d\omega}{dt} = c \ . \tag{18}$$

A questo punto, ricordando (6), (6′), nonché (4), con considerazioni che ricordano quelle svolte in [5],5 e [4],10, si può provare che la metrica della varietà *spazio-tempo* associata all'Universo, nel caso in cui per esso siano verificate le ipotesi fatte all'inizio del n. 1 e non appena si imponga la condizione che le linee orarie dei fotoni siano nello spazio-tempo di lunghezza nulla, risulta espressa da

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - R^2(t)\,[d\omega^2 + \sin^2\omega\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)] \tag{19}$$

nel caso in cui sia $\epsilon = 1$, da

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - R^2(t)\,[d\omega^2 + \sinh^2\omega\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)] \tag{19′}$$

nel caso in cui sia $\epsilon = -1$ e da

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - R^2(t)\,[dr^2 + r^2\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)] \tag{19″}$$

nel caso in cui sia $\epsilon = 0$.

Ricordando le posizioni (5), (5′), da (19), (19′), nonché da (19″), segue che la metrica dello spazio-tempo si può porre nella forma

$$(20) \qquad ds^2 = c^2\, dt^2 - \frac{R^2(t)}{\left(1 + \epsilon \dfrac{r^2}{4}\right)^2} \left[dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta\, d\varphi^2)\right],$$

che è proprio la celebre metrica di Robertson-Walker che nell'ambito relativistico caratterizza i modelli d'universo omogenei e isotropi (ovviamente non statici).

Si può dunque concludere che *l'ipotesi che l'Universo si mantenga nel tempo omogeneo e isotropo, unitamente alla proprietà della luce d'avere la medesima velocità locale rispetto ad ogni riferimento naturale, comporta che la metrica dello spazio-tempo sia necessariamente data dalla metrica di Robertson-Walker.*

E si può inoltre aggiungere che, stante il modo in cui è stata dedotta – deduzione che ha come punto di partenza l'eguaglianza (18), e quindi l'eguaglianza (17) –, *detta metrica si presenta come una conseguenza della legge di composizione delle velocità della meccanica classica.*

7. - Ricordando (5), (5′), a questo punto è il caso di osservare che l'eguaglianza (18) dà luogo, per il fotone considerato, alla relazione

$$(21) \qquad \frac{c\, dt}{R(t)} = \frac{dr}{1 + \epsilon \dfrac{r^2}{4}},$$

la quale coincide con quella che nelle trattazioni effettuate nell'ambito relativistico viene dedotta a partire dalla metrica, scritta nella forma (20).

Considerati due fotoni successivi emessi negli istanti t_i e $t_i + \Delta t_i$ da un elemento O' di $\mathscr{U}$ e diretti verso O, e indicati con t_f e $t_f + \Delta t_f$ gli istanti in cui detti fotoni raggiungono O e con λ_i e $\lambda_f = \lambda_i + \Delta\lambda_i$ gli intervalli spaziali (lunghezze d'onda) che separano i due fotoni all'atto dell'emissione e della ricezione, da (21), procedendo nel modo ben noto seguito in ogni trattazione, si ottiene che sussiste la celebre ralazione

$$(22) \qquad z = \frac{R(t_f)}{R(t_i)} - 1,$$

con

$$z = \frac{\Delta \lambda_i}{\lambda_i} \quad .$$

Le indicazioni osservazionali, fornendo $z > 0$, implicano $R(t_f) > R(t_i)$: la funzione $R(t)$ è quindi crescente in senso stretto e pertanto, stante (7), l'Universo risulta in espansione.

Per quanto concerne l'espressione (22), *si è in presenza di una identità non soltanto formale, bensì sostanziale tra la trattazione fatta in termini newtoniani (ricorrendo cioè alla legge di composizione delle velocità della meccanica classica) e la trattazione fatta in termini relativistici, ossia a partire dalla metrica* (20). Infatti dalla relazione (17), passando dalle coordinate ρ, ϑ, φ alle coordinate comobili ω, ϑ, φ, segue l'espressione (18), la quale a sua volta implica che per lo spazio-tempo sussista, nel senso precisato al n. 6, proprio la metrica (20). Inoltre, l'espressione (18), che segue dalla relazione (17), segue pure inalterata dalla metrica (20), ossia è la stessa che si ottiene nelle trattazioni effettuate nell'ambito relativistico per il fotone F emesso da O.

La presente esposizione pone quindi in chiara evidenza come la relazione (22) *che collega lo spostamento delle righe spettrali verso il rosso presente nella luce emessa dalle galassie all'espansione dell'Universo – relazione che nelle trattazioni viene presentata come una delle maggiori acquisizioni della teoria della relatività generale – discenda in definitiva dalla legge di composizione delle velocità della meccanica classica, a cui si è fatto ricorso per scrivere la relazione* (17), *e dal fatto che la velocità locale della luce sia la stessa in ogni riferimento naturale, nonché, come si ritiene, costante.*

8. - Indicando con t_i l'istante in cui il fotone F considerato nello scrivere l'equazione (17) viene emesso da O e integrando detta equazione si ottiene

$$\rho(t) = R(t) \int_{t_i}^{t} \frac{c}{R(t)} \, dt \ , \tag{23}$$

espressione che fornisce la distanza propria che all'istante t separa il fotone da O.

Analogamente, se si considera il fotone F' emesso dall'elemento O'

all'istante t_i e diretto verso O, integrando l'equazione (17) in cui si sostituisca $-c$ a c e indicando con ω_i la coordinata radiale comobile di O', si ottiene

$$\rho(t) = R(t)\left(\omega_i - \int_{t_i}^{t} \frac{c}{R(t)}\, dt\right) , \tag{24}$$

espressione che fornisce la distanza propria all'istante t che separa F' da O.

La relazione (24) è alla base della teoria degli orizzonti che viene sviluppata nell'ambito relativistico per i modelli d'universo omogenei e isotropi (si veda [12], 2; [13], 9.6; [11], VIII,5; [14], pp. 489-490; ecc.).

Si è voluto qui esplicitamente dedurre le espressioni (23) e (24) partendo dall'equazione (17) invece che da (21) e (7) da cui ovviamente subito seguirebbero (l'eguaglianza (21), pur essendo equivalente a (17), ne maschera il significato fisico), per porre in evidenza come, analogamente a (22), *anch'esse in definitiva seguano dalla legge di composizione delle velocità della meccanica classica e dal fatto che la velocità locale della luce sia la stessa in ogni riferimento naturale e sia ritenuta costante.*

9. - Se si impone infine alle equazioni (14), (15), (16), che sono state ottenute operando nell'ambito della meccanica classica, la condizione di essere compatibili rispetto alla metrica (20), in altri termini se si richiede a dette equazioni di assumere forma tensoriale, ossia intrinseca, nell'ambito di detta metrica, si ottiene che *l'opposto del segno della costante dell'energia α individua la curvatura riemanniana* ϵ e che *detta forma intrinseca è proprio espressa dalle equazioni gravitazionali della teoria della relatività generale.*

La dimostrazione di questo risultato ricorda quella contenuta in [4], 12,13,14,15 e, soprattutto, quella contenuta in [9], III e verrà ripresa, con opportuni perfezionamenti, in un successivo lavoro.

Qui ci si limita ad osservare che la via qui indicata permette di pervenire, almeno nei casi dei modelli d'universo omogenei e isotropi, alle equazioni gravitazionali partendo dalle indicazioni fornite dai dati osservazionali.

Concludendo, si può pertanto affermare che la trattazione qui delineata per sommi capi porta necessariamente ai celebri *modelli relativistici d'universo di Friedmann.*

Questo risultato permette quindi di concludere che *i modelli di Friedmann che caratterizzano i modelli d'universo omogenei e isotropi nell'ambito della teoria della relatività generale si possono costruire partendo dalle sole ipotesi dell'omogeneità e dell'isotropia e facendo ricorso alla proprietà della velocità della luce di avere la stessa velocità locale rispetto a ogni riferimento naturale, senza dover far ricorso alle equazioni gravitazionali.*

Il modo di procedere ora indicato permette tra l'altro, come si proverà nel lavoro sopra preannunciato, di ottenere direttamente l'espressione esatta della *costante di Einstein*, senza affatto fare ricorso a procedimenti di approssimazione. Si veda in proposito anche [4], 14 e [9], III, 13.

Con opportune cautele, le considerazioni esposte brevemente in questo lavoro si possono estendere al caso più generale dei modelli d'universo anisotropi e omogenei (cfr., ad es., [1], [9] (1)).

---

(1) La trattazione in ambito newtoniano riassunta in [1], [9] e sviluppata in [7] sarà oggetto di un'ulteriore e più approfondita e ampia analisi che verrà svolta in prossimi lavori.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARBERIS B., GALLETTO D. - *Newtonian and Relativistic Bianchi I Models of the Universe*, in «"Gravitation, Geometry and Relativistic Physics", Proceedings of "Journées Relativistes 1984", Aussois, May 2-5, 1984», Lecture Notes in Physics n. 212, Springer-Verlag, Berlin, 1984; pp. 290-293.

[2] BONDI H., *Cosmology,* 1st ed., Cambridge Univ. Press, 1952.

[3] GALLETTO D., *Sui fondamenti della meccanica classica, della teoria newtoniana della gravitazione e della cosmologia newtoniana,* in: «Atti del 3° Convegno Nazionale di Relatività Generale e Fisica della Gravitazione, Torino, 18-21 settembre 1978», Accademia delle Scienze, Torino, 1981; pp. 111-157.

[4] GALLETTO D., *Des principes de la mécanique classique aux théories de la gravitation de Newton et Einstein*, in: «Atti del Convegno Internazionale "Aspetti matematici della teoria della relatività", Roma, 5-6 giugno 1980», Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1983: pp. 59-83.

[5] GALLETTO D., *Sulla metrica dello spazio-tempo. II*, Atti Accad. Sci. Torino, **115**, pp. 345-356 (1981).

[6] GALLETTO D., *Premesse alla cosmologia razionale*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **68**, pp. 295-324 (1982).

[7] GALLETTO D., BARBERIS B., *Sur les modèles newtoniens d'univers homogènes*, in: Benenti S., Ferraris M., Francaviglia M. (eds.), «Proceedings of "Journées Relativistes 1983", Torino, May 5-8, 1983», Pitagora, Bologna, 1985; pp.337-372.

[8] GALLETTO D., BARBERIS B., *The Significance of Newtonian Cosmology,* in: Berger A. (ed.), «"The Big Bang and Georges Lemaître", Proceedings of "The International Symposium G. Lemaître", Louvain-la-Neuve, October 10-14, 1983», Reidel, Dordrecht, 1984; pp. 93-102.

[9] GALLETTO D., BARBERIS B., *Sui modelli newtoniani e relativistici d'universo omogenei e anisotropi: caso dei modelli del tipo Bianchi I*, in: Boll. Un. Mat. Ital., Ser. VI, Suppl. Vol. IV-A, N. 1, pp. 177-210 (1985).

[10] GALLETTO D., *Newtonian Cosmology and Newton's Law of Gravitation* (di prossima pubblicazione).

[11] MAVRIDÈS S., *L'Univers relativiste*, Masson, Paris, 1973.

[12] RINDLER W., *Visual Horizons in World-Models*, Mon. Not. Roy. Astronom. Soc., **116**, pp. 662-677 (1956).

[13] RINDLER W., *Essential Relativity*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1977.

[14] WEINBERG S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley, New York, 1972.

Ancora sull'espressione analitica dell'energia libera nei materiali con memoria

DARIO GRAFFI
Bologna

In una nota pubblicata qualche anno fa [1], ho esposto due espressioni analitiche, che ho indicato con ψ_d e ψ_g, per l'energia libera in un materiale con memoria, precisamente in un materiale viscoelastico. ψ_d è stata indicata da Day in un corso C.I.M.E. [2], ψ_g da me proposta nel 1974 [3], è coincidente con l'energia interna di Volterra [4]. Nella prima nota citata mi sono limitato ad un corpo unidimensionale, in questa intendo estendere ψ_d e ψ_g al caso di un corpo viscoelastico tridimensionale. L'estensione è facile ma, a mio avviso, non banale.

Dimostrerò poi che l'espressione per l'energia libera proposta da Hunter [5] e riportata in forma diversa da Dill [6] e in una recente nota da Fabrizio e Morro [7], coincide con ψ_d almeno nel caso di una funzione di memoria somma di esponenziali.

1. Prima di entrare in argomento, richiamerò alcune proprietà di un particolare tensore G del quarto ordine e dello spazio ordinario, tensore ben noto perché compare nelle equazioni costitutive dei corpi elastici, cfr. p.e. [8] ∮ 20.

Indichiamo con g_{ijhk} le componenti cartesiane di G (ovviamente gli indici variano da 1 a 3) e ammetterò che soddisfino le seguenti equazioni:

$$g_{ijhk} = g_{jihk} = g_{ijkh} = g_{hkij} \tag{1.1}$$

sicché potremo dire che G è simmetrico.

Consideriamo ora due tensori del secondo ordine simmetrici T ed E, s'intende nello spazio ordinario rispettivamnte di componenti cartesiane t_{ij} ed e_{ij}.

Ricordiamo anzitutto che si definisce prodotto scalare fra due generici tensori del secondo ordine simmetrici l'espressione

$$(1.2) \qquad T \cdot E = t_{ij} e_{ij} = E \cdot T$$

dove, con una convenzione ben nota e che sempre useremo in seguito, è sottointesa una sommatoria rispetto agli indici ripetuti i, j.

Supponiamo ora che sia:

$$(1.3) \qquad t_{ij} = g_{ijhk} e_{hk}$$

cioè le componenti del tensore T si ottengono componendo le componenti di G con quelle di E poi saturando gli ultimi due indici. Potremo perciò scrivere la (1.3) così

$$(1.4) \qquad T = GE .$$

Consideriamo ora il prodotto scalare di T, come espresso da (1.4) per un altro tensore del secondo ordine simmetrico E'

$$(1.5) \qquad T \cdot E' = GE \cdot E' = g_{ijhk} e_{hk} e'_{ij} .$$

Ora, tenendo presente la (1.1)

$$(1.6) \qquad T \cdot E' = g_{hkij} e'_{ij} e_{hk} = GE' \cdot E = E \cdot GE' .$$

Si ha così la formula ben nota:

$$(1.7) \qquad GE \cdot E' = E \cdot GE' .$$

Consideriamo ora oltre a G un altro tensore quadruplo G' di componenti g'_{ijhk} e con le stesse proprietà di G. Diremo prodotto fra G e G' e lo indicheremo con C, cioè $C = GG'$, il tensore di componenti espresse dalla formula

$$(1.8) \qquad c_{ijhk} = g_{ijlm} g'_{lmhk}$$

dove g' sono le componenti di G' .

Supponiamo ora di poter risolvere il sistema lineare (1.3) rispetto alle e_{hk} ; ammetteremo perciò diverso da zero il determinante del VI ordine Δ delle g_{ijhk}.

Potremo perciò scrivere

$$(1.9) \qquad e_{ij} = d_{ijhk}\, t_{hk}$$

le d_{ijhk} sono i minori degli elementi di Δ. Poiché tali elementi non cambiano con gli scambi di indici che intervengono nelle (1.1), le d_{ijhk} soddisfano alle (1.1) perciò il tensore D di componenti d_{ijhk} è un tensore simmetrico. Ciò posto, notiamo che si ha, ricordando poi (1.4)

$$(1.10) \qquad E = DT \quad \Rightarrow \quad T = GDT$$

e passando alle componenti

$$(1.11) \qquad t_{ij} = g_{ijlm}\, d_{lmhk}\, t_{hk}\ .$$

Affinché la (1.11) sia valida per ogni t_{ij} deve essere (δ_{ih}, δ_{jk} simboli di Kronecker):

$$(1.12) \qquad g_{ijlm}\, d_{lmhk} = \delta_{ih}\, \delta_{jk}$$

cioè il prodotto fra i tensori G e D vale il tensore unitario I. Quindi si potrà scrivere $D = G^{-1}$.

In modo analogo, partendo da (1.4), si ha $DG = \mathrm{I}$, quindi

$$(1.13) \qquad G^{-1}G = GG^{-1}\ .$$

Detto G^{-1} il tensore inverso di G esso è commutabile con G, ovviamente $G^{-1} = D$ è un tensore simmetrico. Infine ammetteremo G strettamente positivo o strettamente negativo (diremo in seguito per brevità positivo o negativo), a seconda che risulti per ogni $E \neq 0$

$$(1.14) \qquad GE \cdot E > 0 \quad , \qquad GE \cdot E < 0\ .$$

Ricordiamo che se G è positivo o negativo esso è certamente invertibile. Ora si ha:

$$GE \cdot E = GG^{-1}\, T \cdot G^{-1}\, T = G^{-1}T \cdot T$$

e per l'arbitrarietà di T si ha che G e G^{-1} hanno lo stesso segno.

Non insisteremo su altre ovvie proprietà dei tensori G.

2. Consideriamo un corpo viscoelastico, per semplicità di esposizione omogeneo; siano $T(t)$ ed $E(t)$ rispettivamente il tensore degli sforzi ed il tensore di deformazione all'istante t e nello stesso punto del corpo, che supporremo soggetto a deformazioni infinitesime. Per scrivere l'equazione costitutiva dei corpi viscoelastici, cioè la relazione fra $T(t)$ e $E(t)$, introduciamo un tensore $G(s)$ simmetrico, funzione di $s \in [0, \infty)$; chiameremo $G(s)$ funzione (o meglio tensore) di rilassamento. Indicheremo $G(o)$ con G_o, con $\dot{G}(s)$ la derivata di $G(s)$ rispetto a s; con $\ddot{G}(s)$ la derivata seconda di $G(s)$. Ovviamente G_o, $\dot{G}(s)$ e $\ddot{G}(s)$ saranno tensori simmetrici; inoltre supporremo $\dot{G}(\infty) = 0$. Allora la citata equazione costitutiva è:

$$T(t)=G_0 E(t) - \int_0^\infty \dot{G}(s) E(t-s)\, ds \tag{2.1}$$

cioè il tensore degli sforzi all'istante t è una funzione del tensore di deformazione nel medesimo istante t ed è un funzionale della storia $E(t-s)$, $s \in (0, \infty)$ del tensore di deformazione; $\dot{G}(s)$ si può anche chiamare la funzione di memoria.

Supporremo inoltre, per ogni $E \neq 0$ e costante sia:

$$\ddot{G}(s) E \cdot E < 0 \tag{2.2}$$

cioè $\ddot{G}(s)$ è un tensore negativo. Per la (2.2), $\dot{G}(s) E \cdot E$ sarà decrescente e poiché $\dot{G}(\infty) = 0$, si ha:

$$\dot{G}(s) E \cdot E > 0 \tag{2.3}$$

cioè $\dot{G}(s)$ è positivo. Anche G_0 si supporrà positivo quindi G_0 e $\dot{G}(s)$ sono tensori invertibili.

Indicheremo ora con $\psi(t)$ l'energia libera per unità di volume all'istante t e in un generico punto del corpo; $\psi(t)$ sarà, come $T(t)$, una funzione di $E(t)$ e un funzionale della storia $E(t-s)$, cioè scriveremo con la notazione di Volterra:

$$\psi(t) = \psi\left(E(t)\ ,\ \overset{\infty}{\underset{0}{E}}(t-s)\right) \tag{2.4}$$

$\psi(t)$ dovrà soddisfare alle seguenti condizioni:

I $\quad \dfrac{\partial \psi(t)}{\partial E(t)} = T(t)$

II Se consideriamo tutte le storie $E(t-s)$, che per $s=0$ assumono il valore finale $E(t)=E_0$, $\psi(t)$ è minima in corrispondenza della storia costante $E(t-s)=E_0$, $s \in [0, \infty)$.

III Vale la relazione

$$T(t) \cdot \dot{E}(t) \geqslant \dot{\psi}(t) \ .$$

Introduciamo ora due eventuali espressioni $\psi_g(t)$ e $\psi_d(t)$ ottenute generalizzando opportunamente quelle della mia nota [1].

Poniamo anzitutto

$$H = \int_0^\infty \dot{G}(s)\, ds \tag{2.5}$$

H è un tensore simmetrico positivo.

Ciò premesso, possiamo

$$\begin{aligned} \psi_g(t) = {} & \frac{1}{2}(G_0 - H)\, E(t) \cdot E(t) + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\infty \dot{G}(s)(E(t) - E(t-s)) \cdot (E(t) - E(t-s))\, ds = \\ = {} & \frac{1}{2} G_0\, E(t) \cdot E(t) - E(t) \cdot \int_0^\infty \dot{G}(s) E(t-s)\, ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\infty \dot{G}(s)\, E(t-s) \cdot E(t-s)\, ds \ . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Notiamo che se esprimiamo ψ_g mediante le componenti di G_0, $\dot{G}(s)$, $E(t)$, $E(t-s)$ ritroviamo la formula (4) della nota [3]. Le notazioni sono però diverse e $G(s)$ è cambiata di segno perché così avviene nell'equazione costitutiva. Porremo inoltre:

$$(2.7)\qquad \psi_d(t)=\frac{1}{2}(G_0-H)E(t)\cdot E(t)+\frac{1}{2}H\Big(E(t)-H^{-1}\int_0^\infty \dot G(s)E(t-s)\,ds\Big)\cdot\Big(E(t)-H^{-1}\int_0^\infty \dot G(s)E(t-s)\,ds\Big)$$

$$=\frac{1}{2}G_0E(t)\cdot E(t)-E(t)\cdot\int_0^\infty \dot G(s)E(t-s)\,ds+\frac{1}{2}H^{-1}\int_0^\infty \dot G(s)E(t-s)\,ds\cdot\int_0^\infty \dot G(s)E(t-s)\,ds\,.$$

Ora poiché i termini in $E(t)$ sono gli stessi sia in ψ_g che in ψ_d, si ha, ricordando (2.1)

$$(2.8)\qquad \frac{\partial\psi_g}{\partial E(t)}=\frac{\partial\psi_d}{\partial E(t)}=G_0E(t)-\int_0^\infty \dot G(s)E(t-s)\,ds=T(t)$$

e la I è soddisfatta per ψ_g e ψ_d.

Tenendo conto che $\dot G(s)$ è positivo, tale risulta l'ultimo termine al secondo membro di (2.6) salvo il caso $E(t)=E(t-s)\ \forall\ s\in[0,\infty)$, cioè nel caso della storia costante.

La condizione II è perciò soddisfatta per ψ_g.

Poiché H è positivo l'ultimo termine al secondo membro di (2.7) è positivo, salvo nel caso

$$(2.9)\qquad E(t)=H^{-1}\int_0^\infty G(s)E(t-s)\,ds$$

in cui si annulla.

Poiché la (2.9) è certamente soddisfatta se $E(t-s)=E(t)$ per $\forall\ s$, si conclude che anche ψ_d soddisfa a II.

Passiamo alla III. E' opportuno anzitutto notare che $\dot E(t-s)$ (come

del resto $\dot{E}(t)$ e $\dot{\psi}(t)$) indica la derivata di $E(t-s)$ rispetto a t. E' opportuno anche ricavare formule, dovute in sostanza a Volterra, che ci saranno utili in seguito.

$$\dot{E}(t-s) = -\frac{d}{ds}(E(t-s)) = \frac{d}{ds}(E(t) - E(t-s)) . \tag{2.10}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \dot{G}(s)\dot{E}(t-s) \cdot (E(t)-E(t-s))\, ds &= \int_0^\infty (\dot{G}(s) \frac{d}{ds}(E(t) - \\ &- E(t-s))) \cdot (E(t) - E(t-s))\, ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d}{ds} [\dot{G}(s)(E(t)-E(t-s)) \cdot (E(t)- \\ &- E(t-s))]\, ds - \frac{1}{2} \int_0^\infty \ddot{G}(s)(E(t) - E(t-s)) \cdot \\ &\cdot (E(t) - E(t-s))\, ds \ . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ora il primo termine all'ultimo membro di (2.11) è nullo perché per $s = 0$ $E(t) - E(t-s) = 0$ e inoltre $\dot{G}(\infty) = 0$. Si ha così:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \dot{G}(s)\dot{E}(t-s) \cdot (E(t)-E(t-s))\, ds &= - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^\infty \ddot{G}(s)(E(t)-E(t-s)) \cdot (E(t)-E(t-s))\, ds . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Un'altra formula utile è la seguente:

$$\int_0^\infty \dot G(s)\dot E(t-s)\,ds = \int_0^\infty \dot G(s)\frac{d}{ds}(E(t)-E(t-s))\,ds = \tag{2.13}$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{ds}[\dot G(s)(E(t)-E(t-s))]\,ds - \int_0^\infty \ddot G(s)(E(t)-$$

$$-E(t-s))\,ds = -\int_0^\infty \ddot G(s)(E(t)-E(t-s))\,ds\;.$$

Si ha allora ricordando (2.8) (2.10) e (2.12)

$$\dot\psi_g(t) = \frac{\partial \psi_g(t)}{\partial E(t)}\cdot \dot E(t) - E(t)\cdot \int_0^\infty \dot G(s)\dot E(t-s)\,ds + \tag{2.14}$$

$$+\int_0^\infty \dot G(s)\dot E(t-s)\cdot E(t-s)\,ds =$$

$$= T(t)\cdot \dot E(t) - \int_0^\infty \dot G(s)(E(t)-E(t-s))\cdot \dot E(t-s)\,ds =$$

$$= T(t)\cdot \dot E(t) + \frac{1}{2}\int_0^\infty \ddot G(s)(E(t)-E(t-s))\cdot$$

$$\cdot (E(t)-E(t-s))\,ds.$$

Ora poiché $\ddot G(s)$ è negativo, l'ultimo integrale ora scritto è negativo o nullo, quindi conforme a III

$$T(t)\cdot E(t) \geqslant \dot\psi_g(t)$$

il caso uguale si ha per $E(t-s)=E(t)$, cioè nel caso della storia constante.

Passiamo a ψ_d. Si ha

$$(2.15) \qquad \dot{\psi}_d = \frac{\partial \psi_d(t)}{\partial E(t)} \cdot \dot{E}(t) - E(t) \cdot \int_0^\infty \dot{G}(s)\dot{E}(t-s)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} H^{-1} \int_0^\infty \dot{G}(s)\dot{E}(t-s)\, ds \cdot \int_0^\infty \dot{G}(s) E(t-s)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} H^{-1} \int_0^\infty \dot{G}(s) E(t-s)\, ds \cdot \int_0^\infty \dot{G}(s)\dot{E}(t-s)\, ds =$$

$$= T(t) \cdot \dot{E}(t) + Q(t)$$

dove, ricordando poi (2.13)

$$(2.16) \qquad Q(t) = - H^{-1} \int_0^\infty \dot{G}(s)\dot{E}(t-s)\, ds \cdot \int_0^\infty \dot{G}(s)(E(t) -$$

$$- E(t-s))\, ds = H^{-1} \int_0^\infty \dot{G}(s)(E(t) - E(t-s)) ds \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty \ddot{G}(s)(E(t) - E(t-s))\, ds \; .$$

Ora, affinché sia valida la III, deve essere

$$(2.17) \qquad Q \leqslant 0 \, .$$

Ora, escludendo il caso della storia costante, per cui $Q = 0$, pur essendo $\dot{G}(s)$ e $\ddot{G}(s)$ di segno opposto, non si può affermare, in generale, la (2.17), come ho mostrato con un esempio in appendice della mia nota [1].

3. La (2.17) è però soddisfatta per particolari funzioni di rilassamento che spesso si incontrano in pratica. Sia

$$(3.1) \qquad G(s) = G_0 - \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda s} - \frac{1}{\lambda} \right) \dot{G}_0$$

dove G_0 e $\dot{G}_0$ sono indipendenti da s e positivi, λ è un numero positivo.

Si ha così

$$\dot{G}(s) = e^{-\lambda s}\, \dot{G}_0 \tag{3.2}$$

cioè la funzione di memoria è un esponenziale. Si ha allora

$$Q = -\lambda \left(\int_0^\infty e^{-\lambda s}\, ds \right)^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda s} (E(t) - E(t-s))\, ds \cdot \tag{3.3}$$

$$\cdot \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, \dot{G}_0\, (E(t) - E(t-s))\, ds =$$

$$= -\lambda^2 \dot{G}_0 \int_0^\infty e^{-\lambda s} (E(t) - E(t-s))\, ds \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty e^{-\lambda s} (E(t) - E(t-s))\, ds \,.$$

Quindi $Q < 0$; ψ_d soddisfa a III e può perciò rappresentare l'energia libera.

Passiamo ora al caso più generale in cui la funzione di rilassamento sia una somma di n termini del tipo (3.1), cioè

$$G(s) = \sum_1^n{}_r \left[G_{0r} - \left(\frac{1}{\lambda_r} e^{-\lambda_r s} - \frac{1}{\lambda_r} \right) \dot{G}_{0r} \right] \tag{3.4}$$

con ovvio significato dei simboli e G_{0r}, $\dot{G}_{0r}$, λ_r positivi.

Quindi

$$G_0 = \sum_1^n{}_r\, G_{0r} \quad , \quad \dot{G}(s) = \sum_1^n{}_r\, e^{-\lambda_r s}\, \dot{G}_{0r} \tag{3.5}$$

cioè la funzione di memoria è una somma di esponenziali.

Allora assumiamo come espressione dell'energia libera la relazione

$$\widetilde{\psi}_d(t) = \sum_1^n{}_r\, \psi_{dr}(t) \tag{3.6}$$

dove ψ_{dr} è espressa da (2.7) tenendo conto di (3.1), in cui però G_0, $\dot{G}_0$ e $\dot{G}(s)$ sono sostituiti rispettivamente da G_{0r}, $\dot{G}_{0r}$ e $e^{-\lambda_r s}\, \dot{G}_{0r}$. Allora

riprendendo calcoli già fatti, si trova

$$(3.7)\qquad \frac{\partial \tilde{\psi}_{dr}(t)}{\partial E(t)} = G_{0r}\,E(t) - \int_0^\infty e^{-\lambda_r s}\,\dot{G}_{0r}\,E(t-s)\,ds = T_r(t)$$

e sommando rispetto a r tenendo presente la (3.6), si ha

$$(3.8)\qquad \frac{\partial \tilde{\psi}_d(t)}{\partial E(t)} = \sum_{1}^{n}{}_r\, T_r(t) = T(t)$$

conforme a I.

Inoltre poiché il minimo di ψ_{dr} si ha per $E(t) = E(t-s)$ dalla (3.6) segue II.

Poiché $\dot{\psi}_{dr}$ soddisfa a III, si ha

$$(3.9)\qquad \dot{\psi}_{dr} \leqslant T_r(t)\cdot \dot{E}(t)$$

e quindi sommando e ricordando la (3.6) si ha

$$(3.10)\qquad \dot{\tilde{\psi}}_d(t) \leqslant T(t)\cdot \dot{E}(t)$$

cioè anche $\tilde{\psi}$ soddisfa III.

Analoghe considerazioni si potrebbero fare per ψ_g. Basta porre

$$(3\ 11)\qquad \psi_g(t) = \sum_{1}^{n}{}_r\, \psi_{gr}(t)$$

dove ψ_{gr} è espressa da (2.6), con le stesse sostituzioni fatte nel caso di ψ_{dr}.

Poiché ψ_g è un funzionale lineare della funzione di memoria, si ha subito

$$(3.12)\qquad \tilde{\psi}_g = \psi_g\ .$$

Notiamo invece che $\tilde{\psi}_d$ non è in generale uguale a ψ_d, poiché ψ_d non è un funzionale lineare di $\dot{G}(s)$.

4. Supponiamo che la funzione di rilassamento sia espressa da (3.1) e quindi $\dot{G}(s) = e^{-\lambda s}\,G_0$.

In questo caso ricordiamo che l'ultimo termine di ψ_d, come risulta da (2.7), ha la seguente forma

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda s}\,ds\right)^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda s}\,E(t-s)\,ds\,\cdot \tag{4.1}$$

$$\cdot\int_0^\infty e^{-\lambda s}\,\dot{G}_0\,E(t-s)\,ds =$$

$$=\frac{\lambda}{2}\dot{G}_0\int_0^\infty e^{-\lambda s_1}\,E(t-s_1)\,ds_1\,\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty e^{-\lambda s_2}\,E(t-s_2)\,ds_2 =$$

$$=\frac{\lambda}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty \dot{G}_0\,e^{-\lambda(s_1+s_2)}\,E(t-s_1)\,\cdot$$

$$\cdot\,E(t-s_2)\,ds_1\,ds_2 =$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty \ddot{G}(s_1+s_2)\,E(t-s_1)\,\cdot$$

$$\cdot\,E(t-s_2)\,ds_1\,ds_2\ .$$

Allora, sostituendo in (2.7), si ha

$$\psi_d(t)=\frac{1}{2}G_0 E(t)\cdot E(t)-\int_0^\infty \dot{G}(s)E(t-s)\cdot E(t)\,ds-\tag{4.2}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty \ddot{G}(s_1+s_2)\,E(t-s_1)\cdot E(t-s_2)ds_1\,ds_2\,.$$

Ora consideriamo il caso in cui $G(s)$ sia data da (3.4). Si ha allora che $\psi_{dr}(t)$ è espressa da (4.2), salvo che in luogo di $G(s)$ si deve porre $G_r(s)$. Quindi procedendo come nel numero precedente, si trova che $\widetilde{\psi}_d$ è conforme alla (4.2), in cui si intenda:

$$(4.3) \qquad \dot{G}(s) = \sum_{1}^{n}{}_r \, e^{-\lambda_r s} \, \dot{G}_{0r} \, , \quad \ddot{G}(s_1 + s_2) = -\sum_{1}^{n}{}_r \, \lambda_r \, e^{-\lambda_r (s_1 + s_2)} \, \dot{G}_{0r} \, ,$$

$$G_0 = \sum_{1}^{n}{}_r \, G_{0r} \; .$$

Se esprimiamo la (4.2) mediante le componenti g_{ijhk} di $G(s)$, si ha

$$(4.4) \qquad \tilde{\psi}_d = \frac{1}{2} g_{ijhk}(0) \, e_{ij}(t) \, e_{hk}(t) - \int_0^\infty \dot{g}_{ijhk}(s) \, e_{ij}(t) \, e_{hk}(t-s) \, ds - \frac{1}{2} \int_0^\infty \!\! \int_0^\infty \ddot{g}_{ijhk}(s_1 + s_2) \, e_{ij}(t - s_1) \, e_{hk}(t - s_2) \, ds_1 \, ds_2$$

che coincide in sostanza con la formula (4.28) di Dill [6], se si tiene presente che noi abbiamo supposto implicitamente ψ_d nulla per $E(t-s)=0$, $s \in [0, \infty)$.

Inoltre, nel nostro caso, i due integrali al secondo membro di (4.4) sono cambiati di segno, perché la funzione di memoria $\dot{G}(s)$ nell'equazione costitutiva ha segno opposto alla funzione di memoria nell'analoga equazione di Dill.

BIBLIOGRAFIA

[1] GRAFFI D. - *Sull'espressione analitica di alcune grandezze termodinamiche nei materiali con memoria*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova LXVIII (1982) pp. 17-29.

[2] DAY W.A. - *The thermodynamics of materials with memory*, C.I.M.E., Liguori, Napoli 1979, pp. 55-91.

[3] GRAFFI D. - *Sull'espressione dell'energia libera nei materiali viscoelastici lineari*, Annali di Matematica Pura e Applicata (4) XCVIII (1974), pp. 273-279.

[4] VOLTERRA V. - *Energia nei fenomeni elastici ereditari*, Acta Pontificia Acad. Scient. IV (1940) pp. 115-128; Opere Vol. V, pp. 508-516.

[5] HUNTER S.C. - *Tentative equations for the propagation of stress, strain and temperature fields in viscoelastic solids,* Journ. Mech. Phys. Solids IX (1961) pp. 39-51.

[6] DILL E.H., *Simple materials with fading memory*, Continuum Physics, Edited by Cemal Eringen Academic Press vol. II (1975) pp. 284-403.

[7] FABRIZIO M. e MORRO A., *Thermodynamic restrictions on relaxation functions in linear viscoelasticity*, Mechanics Research Communications XII (1985) pp 101-105.

[8] GURTIN M.E. - *The linear theory of elasticity Handbuch der Physik, Springer VI a/2 (1972) pp. 1-295.*

Un teorema di unicità in elastodinamica lineare

GIUSEPPE GRIOLI
Padova

Dimostrerò un teorema di unicità nella dinamica dei continui termoelastici lineari nell'ipotesi che la ben nota relazione costitutiva di Fourier che lega il flusso di calore alla temperatura non sia necessariamente valida.

Concordemente all'indirizzo della "Termodinamica estesa", supporrò che quel legame costitutivo possa sostituirsi con un'equazione di campo del tipo di quella di Maxwell-Cattaneo valida per i conduttori rigidi [1], [2] o del tipo di quella da me stabilita mediante una sua opportuna generalizzazione in modo da riuscire adatta ai conduttori deformabili [3], [4].

Risulterà chiaro, tra l'altro, che l'assegnazione della sola temperatura iniziale non è in generale sufficiente perché il problema risulti ben posto ma occorre anche la conoscenza del valore iniziale del flusso di calore.

1. - Sia **S** un solido termoelastico eventualmente anisotropo ma (per semplicità), omogeneo, suscettibile di piccole deformazioni caratterizzate dallo spostamento **u** contato a partire da una configurazione di riferimento, C, e di piccole variazioni di temperatura $\theta = T - T^{\circ}$, ove T è la temperatura attuale e T° quella iniziale, assunta da **S** in C. Per semplicità supporrò che C sia configurazione di equilibrio naturale a temperatura uniforme. Ciò significa che in assenza di forze esterne, **S**, quando trovasi in C a temperatura T° (che si supporrà uniforme), ha stress nullo.

Dette $\epsilon_{rs} = \epsilon_{sr}$ le sei caratteristiche linearizzate dello strain, la densità di energia potenziale termoelastica, W, è notoriamente esprimibile mediante la forma quadratica

$$W = \overline{W} + m_{rs}\, \epsilon_{rs}\, \theta + \frac{b}{2} \theta^2 \quad , \tag{1}$$

con

$$(2)\qquad \overline{W} = \frac{1}{2} m_{rspq} \, \epsilon_{rs} \, \epsilon_{pq} \ .$$

I coefficienti che intervengono nelle (1), (2) sono delle costanti soddisfacenti alle note relazioni

$$(3)\qquad m_{rspq} = m_{srpq} = m_{rsqp} = m_{pqrs} \ , \ m_{rs} = m_{sr} \ , \quad b < 0$$

e alle ben note relazioni per cui la $\overline{W}$ risulta definita positiva.

Sarà utile richiamare anche le relazioni che legano lo stress, $Y_{rs} = Y_{sr}$, la densità di entropia, E, e il calore specifico, c, all'energia potenziale:

$$(4)\qquad \begin{cases} Y_{rs} = -\dfrac{\partial W}{\partial \epsilon_{rs}} = -\dfrac{\partial \overline{W}}{\partial \epsilon_{rs}} - m_{rs}\,\theta = \overline{Y}_{rs} - m_{rs}\,\theta \ , \\ \overline{Y}_{rs} = -\dfrac{\partial \overline{W}}{\partial \epsilon_{rs}} \ , \\ E = -m_{rs}\,\epsilon_{rs} - b\,\theta \quad ; \quad c = -T\dfrac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = -bT > 0 \ . \end{cases}$$

Denoterò con y_i le coordinate del generico punto di C rispetto a un presupposto riferimento trirettangolo levogiro, con μ la densità materiale e con **F** il vettore che caratterizza le forze di massa. Con riferimento a tali posizioni, le equazioni indefinite che regolano i piccoli movimenti e le piccole variazioni di temperatura di **S** si scrivono

$$(5)\qquad \overline{Y}_{rs,s} - m_{rs}\,\theta_{,s} = \mu\,(F_r - \ddot{u}_r) \ ,$$

$$(6)\qquad m_{rs}\,\dot{\epsilon}_{rs} + b\,\dot{\theta} - \frac{q_{i,i}}{T} = 0 \ .$$

Nelle equazioni (5), (6) **q** denota il vettore flusso di calore mentre la virgola indica derivazione rispetto alle y_i.

Detta σ la frontiera di C, supporrò che il problema sia misto sia sotto l'aspetto meccanico che quello termico. Detto **N** il versore della normale interna a σ, supporrò, cioè, che sulla frontiera sussistano le condizioni

$$(7)\qquad \begin{cases} (\overline{Y}_{rs} - m_{rs}\,\theta)\,N_s = f_r & (\text{su } \sigma_1)\ , \\ u_r = u'_r\,(y,\,t) & (\text{su } \sigma_2)\ , \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} \theta = \theta'\,(y,\,t) & (\text{su } \sigma'_1)\ , \\ \mathbf{q}\cdot\mathbf{N} = p\,(y,\,t) & (\text{su } \sigma'_2)\ . \end{cases}$$

E' chiaro il significato dei secondi membri delle (7), (8), mentre, con altrettanto evidente significato, si deve ritenere $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$, $\sigma'_1 + \sigma'_2 = \sigma$.
Per quanto concerne le condizioni iniziali si supporrà che sia

$$(9)\qquad u_r(y,o) = \overset{\circ}{u}_r(y)\quad ,\quad \dot{u}_r(y,o) = v_r(y)\quad ,\quad \theta\,(y,o) = \theta_\circ(y)\ .$$

Nessuna precisazione occorre (almeno per ora) per il vettore $\mathbf{q}$. E' altresì ovvio che i secondi membri di (7.2), (8.1), (9) devono rendere compatibili tali relazioni; dovrà, pertanto supporsi $u'_r(y,o) = \overset{\circ}{u}_r(y)$, $\dot{u}'_r(y,o) = v_r(y)$, $\theta'(y,o) = \theta_\circ(y)$.

2. - Denotando con $P^{(e)}$ la potenza delle forze esterne assegnate (cioè, agenti in C e su σ_1), e con $\mathcal{T}$ la forza viva del solido, da (5), (6), (7), (8) segue

$$(10)\qquad \int_C (\overline{Y}_{rs} - m_{rs}\,\theta)\,u_{r,s}\,dC + \int_{\sigma_2} (\overline{Y}_{rs} - m_{rs}\,\theta)\,N_s\,\dot{u}_r\,dC = -$$
$$= -P^{(e)} + \frac{d\mathcal{T}}{dt}\ ,$$

$$(11)\qquad \int_C m_{rs}\,\dot{\epsilon}_{rs}\,\theta\,dC + \int_C b\,\theta\,\dot{\theta}\,dC - \int_C \frac{q_{i,i}\,\theta}{T}\,dC = 0\ .$$

Nell'ambito della teoria lineare di cui quì trattasi deve ritenersi $\theta = T - T^\circ$ piccolo del primo ordine di fronte alle quantità finite T e T° e di quadrato trascurabile di fronte ad esse. Di conseguenza, tenuto conto che T° non dipende dalle y_i, dalla (11) dopo qualche sviluppo si

trova, in base a (8),

$$\int_C m_{rs}\,\dot{\epsilon}_{rs}\,\theta\,dC = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_C \frac{c\,\theta^2}{T^\circ}\,dC - \int_C \frac{q_i T_{,i}}{T^\circ}\,dC - \tag{12}$$
$$-\int_{\sigma_1'} \theta'\,\frac{q_i N_i}{T^\circ}\,d\sigma_1' - \int_{\sigma_2'} \frac{\theta\,p}{T^\circ}\,d\sigma_2' .$$

Da (10), (11), (12), integrando dall'istante iniziale all'istante t generico si ottiene

$$\int_C \overline{W}\,dC + \mathcal{T} + \frac{1}{2}\int_C \frac{c\,\theta^2}{T^\circ}\,dC = \int_C \overline{W}_\circ\,dC + \mathcal{T}_0 + \tag{13}$$
$$+\frac{1}{2}\int_C \frac{c\,\theta_0^2}{T^\circ} + \int_0^t dt\int_C \frac{q_i T_{,i}}{T^\circ}\,dC$$
$$+\int_0^t P^{(e)}\,dt + \int_0^t dt\int_{\sigma_2} (Y_{rs} - m_{rs}\,\theta)N_s\dot{u}_r\,d\sigma_2 +$$
$$+\int_0^t dt\int_{\sigma_1'} \frac{\theta' q_i N_i}{T^\circ}\,d\sigma_1' + \int_0^t dt\int_{\sigma_2'} \frac{\theta\,p}{T^\circ}\,d\sigma_2' .$$

In assenza di una perturbazione iniziale e di sorgenti sulla frontiera, cioè, nell'ipotesi che sia

$$\begin{cases} u_r^\circ(y) = v_r(y) = \theta_\circ(y) = 0 , \\ f_r = F_r = 0 , \quad \theta'(y,t) = p(y,t) = u_r'(y,t) = 0 , \end{cases} \tag{14}$$

da (13) segue

$$\int_C \overline{W}\,dC + \mathcal{T} + \frac{1}{2}\int_C \frac{c\,\theta^2}{T^\circ}\,dC = \int_0^t dt\int_C \frac{q_i T_{,i}}{T^\circ}\,dC . \tag{15}$$

3\. - Sia **g** il gradiente della temperatura, cioè il vettore di componenti $T_{,i}$. In base a (4.4), (15), è chiaro che condizione necessaria e sufficiente

affinché sussista un teorema di unicità per il problema analitico rappresentato dalle (4), (5), ..., (9) è che per ogni t risulti

$$\int_0^t dt \int_C \frac{q \cdot g}{T^\circ} dC \leqslant 0 \ . \tag{16}$$

La (16) è sempre soddisfatta ove si ammetta come usualmente si fa che sia $\mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \leqslant 0$ in ogni istante, condizione verificata se $\mathbf{q}$ è legato a $\mathbf{g}$ dalla legge di Fourier. Vari motivi, tuttavia, consigliano spesso di sostituire a quella delle leggi di legame tra $\mathbf{q}$ e $\mathbf{g}$ di tipo diverso. Ad es., di sostituire alla legge di Fourier l'equazione di campo [1], [2]

$$z\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} + L\mathbf{g} = 0 \ , \tag{17}$$

ove z e L sono dei coefficienti costanti positivi. La (17) è da ritenersi valida solo nell'ipotesi di conduttori rigidi. Nel caso di continui deformabili, eventualmente anisotropi, la legge (17) si può generalizzare sostituendola con l'equazione [3], [4]

$$z\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{1} - z\dot{L}L^{-1})\,\mathbf{q} + L\mathbf{g} = 0 \ \ , \tag{18}$$

ove L è un operatore matriciale simmetrico e definito positivo dipendente dallo strain e dalla temperatura e $\mathbf{1}$ denota la matrice identica.

Nel caso di piccole deformazioni e di piccole variazioni di temperatura la (18) si riduce alla (17), salvo l'eventuale dipendenza di L dalla temperatura (1).

Nel caso lineare (che qui interessa) la (16) è una conseguenza necessaria della (17), come mostrerò subito. A tal fine comincio con l'osservare che la matrice L, data la supposta linearità della trasformazione va valutata sullo stato di riferimento, cioè per $\epsilon_{rs} = 0$, $\theta = 0$ e, pertanto, è da ritenersi indipendente da t. Inoltre essa è simmetrica e definita positiva e tale pertanto risulterà la sua inversa L^{-1}. Per tali motivi, da (17) segue

(1) Vale la pena di osservare che anche nel caso di deformazioni finite la (18) può ricondursi a un'equazione del tipo (17). Basta porre

$$\mathbf{q} = L\mathbf{Q}$$

perché la (18) si muti, com'è facile verificare, nell'equazione

$$z\dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q} + \mathbf{g} = 0 \ .$$

$$(19) \qquad \mathbf{q}\cdot\mathbf{g} = -zL^{-1}\,\dot{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{q} - L^{-1}\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} = -z\,\frac{d}{2dt}\,(L^{-1}\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}) - \\ - L^{-1}\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} \quad ,$$

dalla quale si deduce

$$(20) \qquad \int_0^t dt \int_C \frac{q\cdot g}{T^\circ}\,dC = -\frac{z}{2\,T^\circ}\left[\int_C L^{-1}\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}\,dC - \right. \\ \left. - \int_C L^{-1}\,\mathbf{q}^\circ\cdot\mathbf{q}^\circ\,dC\right] - \int_0^t dt \int_C \frac{L^{-1}}{T^\circ}\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}\,dC \; .$$

E' evidente che ogni qualvolta sia $\mathbf{q}^\circ = 0$ (flusso di calore iniziale nullo) dalla (20) segue la (16). D'altronde, la sostituzione della relazione costitutiva di Fourier con un'equazione di campo del tipo della (17) o – più in generale – della (18) implica la possibilità (e la necessità) di designare il valore iniziale di $\mathbf{q}$ e questo quando ha il significato di differenza tra i valori di due distinte soluzioni del problema termodinamico eventualmente esistenti e distinte non può che essere nullo. Sussiste, pertanto, la (16), c.d.d.

Si conclude che ove esista una soluzione del problema precedentemente posto essa è unica. L'unicità va intesa, naturalmente, in senso debole, nel senso, cioè, che ognuno dei termini a primo membro della (15), valutato in corrispondenza alla differenza tra gli elementi di due soluzioni eventualmente distinte risulta nullo per ogni t. Condizioni aggiuntive opportune di regolarità analitica implicherebbero l'annullarsi di quelle differenze per ogni t.

OSSERVAZIONE - Il fattore T° nella (20), indipendente dal tempo, è inessenziale. Pertanto, insieme alla (19) sussiste anche la limitazione

$$(21) \qquad \int_0^t dt \int_C \mathbf{q}\cdot\mathbf{g}\,dC \leqslant 0 \; .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] CATTANEO C. - *Atti del Seminario Matematico e fisico dell'Università di Modena,* 3, (1948).

[2] CATTANEO C. - Compt. Rend. Acad. Sci., 247 (1958).

[3] GRIOLI G. - Rend. Classe di Sci. Fis. Mat. e Nat. dell'Accademia Nazionale dei Lincei, S. VIII, V. LXVII, fasc. 5, novembre, fasc. 6, dicembre (1979).

[4] GRIOLI G. - Suppl. B.U.M.I., vol. IV, 5, N. 1 (1985).

Sopra una possibile estensione della nozione di gruppo di simmetria per solidi termoelastici

TRISTANO MANACORDA
Istituto di Matematiche Applicate «U. Dini»
Facoltà di Ingegneria - Università di Pisa
Via Diotisalvi 2 - 56100 Pisa

1 - La nozione, così importante nella teoria dei continui, di gruppo di simmetria di un materiale, è stata introdotta da Noli [1], [2] in relazione unicamente alla deformazione di un continuo a partire da una data configurazione di riferimento. A Wang e Bowen [3] si deve l'estensione al caso in cui si tenga conto della temperatura θ nella configurazione attuale, e a Gurtin e Williams [5] a quello in cui si tenga anche conto della determinazione attuale della densità ρ. Williams [6] ha poi esaminato l'eventualità che la risposta del materiale si realizzi mediante un funzionale della storia della deformazione. Non mi è nota alcuna indagine nella quale si tenga anche conto della temperatura che, secondo la teoria classica, va attribuita ad ogni possibile configurazione di riferimento. La presente nota è un esame preliminare dell'argomento.

2 - Sia $\mathscr{C}$ un solido termoelastico, per il quale, cioè, lo stato di tensione e l'entropia nella configurazione attuale C sono individuati da funzioni di risposta dipendenti dal gradiente di deformazione F a partire da una conveniente configurazione di riferimento e dalla temperatura θ. Si aggiunge tradizionalmente l'ipotesi (che viene così a far parte della definizione di solido termoelastico) che in corrispondenza ad ogni temperatura τ dell'intervallo (τ_1, τ_2), esista una ed una sola configurazione di riferimento C_τ a partire dalla quale si può determinare lo stato del corpo nella configurazione attuale C [1]. Detta, cioè, f_R la funzione di ri-

---

[1] Il particolare materiale termoelastico è così anche caratterizzato dalla scelta della parametrizzazione $C = C(\tau)$.

sposta, per la tensione nello stato attuale è:

(2.1) $T(x) = \rho f_R \; (F, \theta, \tau; X)$

mentre una relazione analoga vale per l'entropia specifica η. Nella (2.1) X è la posizione in C_τ della particella che occupa la posizione x in C e $\rho = \rho_{\tau/(\det F)}$ è la densità in C.

Se $C_{\tau'}$ è una diversa configurazione di riferimento, e $f_{R'}$ la relativa funzione di risposta, naturalmente è anche:

(2.2) $T(x) = \rho f_{R'} \; (F', \theta, \tau'; X')$

con

(2.3) $F = F' P$

dove P è il gradiente di deformazione relativo alla trasformazione $C_\tau \to C_{\tau'}$.

Ove si tenga conto solo della dipendenza di f dalla deformazione, due configurazioni C_τ e $C_{\tau'}$ si possono dire equivalenti [2] se a partire da esse, a parità di deformazione, si ottiene un identico stato di tensione. In tal caso, i gradienti di deformazione P relativi a tutte le configurazioni di riferimento equivalenti ad una data, C_τ, costituiscono un gruppo che si chiama gruppo di simmetria del materiale.

Volendo tener presente la dipendenza di f_R anche da τ, si può tradurre analiticamente tale proprietà in due maniere distinte:

(a) $f_R \; (F, \theta, \tau; X) = f_{R'} \; (F, \theta, \tau'; X')$,

(b) $f_R \; (F, \theta, \tau; X) = f_{R'} \; (F, \theta, \tau; X')$.

Si assuma (a). Poiché valgono (2.1), (2.2) e (2.3), si ottiene la condizione

(2.5) $f_R \; (F, \theta, \tau; X) = f_R \; (F P^{-1}, \theta, \tau; X)$

da valere per ogni F invertibile ed ogni $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. I tensori invertibili

---

(2) 0 materialmente isomorfe.

P per i quali vale (2.5) identicamente rispetto ad F individuano il gruppo di simmetria del materiale relativo a C_τ [3]. Come si vede, la supposta dipendenza di f da τ non implica alcuna differenza dalla teoria classica.

Valga (b); (2.5) è sostituita da:

$$f_R\,(F,\theta,\tau;X)=f_R\,(F\,P^{-1},\theta,\tau';X). \tag{2.6}$$

Come si vede, si presenta ora una restrizione anche per la temperatura di riferimento τ'. In ogni modo, tutte le coppie (P,τ') per le quali (2.6) è eventualmente soddisfatta per ogni F invertibile (e $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$) rendono C_τ e $C_{\tau'}$ indistinguibili da un esame dello stato di tensione nella configurazione attuale.

Osservazione: La (2.6) è certamente soddisfatta da ogni $P\in g_\tau$ se f_R non dipende effettivamente da τ [8].

Sia

$$\tau'=\gamma_\tau\,(\tau,P_\tau) \tag{2.7}$$

la legge la quale assegna, scelta C_τ, la temperatura τ' da assegnare a $C_{\tau'}$, funzione eventualmente anche del gradiente di deformazione inerente la trasformazione $C_\tau\to C_{\tau'}$. Se esiste una funzione γ e un tensore H invertibile che rendono (2.6) soddisfatta qualunque sia F invertibile e $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$, la coppia (γ,H) appartiene alla collezione di elementi che si potrebbe ancora chiamare (assai impropriamente) gruppo di simmetria del materiale relativo a C_τ: con esperienze sullo stato di tensione del materiale in C e sulla distribuzione attuale della temperatura non si riesce a distinguere se la configurazione di riferimento corrispondente sia C_τ o $C_{\tau'}$.

Osservazione: E' evidente come l'esistenza o la non esistenza di coppie per le quali vale (2.6) è strettamente legata alla legge che assegna ad ogni configurazione di riferimento la temperatura corrispondente.

3 - Nella teoria classica si pensa a C_τ come ad una configurazione di equilibrio a temperatura uniforme in assenza di ogni forza esterna. Se,

(3) Propriamente il gruppo $g_\tau(\theta)$ corrispondente alla temperatura attuale θ. Il gruppo di simmetria g_τ è dato da $g_\tau=\bigcap_{\theta\in[\theta_1,\theta_2]} g_\tau(\theta)$.

in particolare, il solido è isotropo e omogeneo in C_τ, la configurazione di riferimento è naturale, ed ogni altra configurazione di riferimento ancora naturale si ottiene da C_τ con una dilatazione uniforme.

Sia ψ°_τ l'energia libera del materiale in C; poiché

$$T = \rho \, \partial_F \, \psi_\tau \, F^T \tag{3.1}$$

se $C_{\tau'}$ è priva di stress, deve aversi:

$$\rho_{\tau'} \, \partial_P \, \psi_\tau \, P^T = 0 \tag{3.2}$$

con

$$P = \delta \, Q \quad , \quad \delta \text{ costante, } Q \text{ ortogonale.} \tag{3.3}$$

La (3.2) è la condizione che può permettere di determinare τ' in funzione di τ (e di P). Tra tutte le configurazioni appartenenti al gruppo meccanico di simmetria occorre quindi selezionare quelle eventuali configurazioni le quali, subordinatamente a (3.2) e (3.3), soddisfano a (2.6) per ogni F invertibile e ogni $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Osservazione: Gurtin e Williams [4] hanno provato che i tensori P i quali individuano il gruppo meccanico di isotropia, devono avere determinante unitario. Tale condizione viene ora a cadere perché l'insieme delle coppie (γ, H) non sono più un gruppo.

BIBLIOGRAFIA

[1] NOLL W. - *A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media,* Arch. Rat. Mech. An. 2 (1958) 197-226.

[2] TRUESDELL C. A., NOLL W. - *The non-linear field theories of Mechanics,* Handbuch d. Physik, Bd. III/3, Springer Verlag, Berlin, 1965.

[3] WANG C.C., BOWEN R.M. - *On the thermodynamics of non-linear materials with quasi-elastic response,* Arch. Rat. Mech. An. 22 (1966) 79-99.

[4] GURTIN M.E., WILLIAMS W.O. - *On the inclusion of the complete symmetry group in the unimodular group,* Arch. Rat. Mech. An. 23 (1966) 163-172.

[5] GURTIN M.E., WILLIAMS W.O. - *Phases of the elastic materials,* ZAMP 18 (1967) 132-135.

[6] WILLIAMS W.O. - *An extension of the concept of materials symmetry*, Meccanica 3 (1968) 81-85.

[7] I-SHI-LIU - *On the requirement that the material symmetries shall preserve density,* Arch. Rat. Mech. An. 68 (1978) 19-26.

[8] TOLOTTI C. - *Sul potenziale termodinamico dei solidi elastici omogenei ed isotropi per trasformazioni finite,* Atti R. Acc. Italia 14 (1943) 529-541.

Proprietà di reciprocità dei campi magnetofluidodinamici

GIULIO MATTEI
Meccanica Razionale - Facoltà di Ingegneria
Università di Pisa

Summary. *Four examples of exact magnetofluiddynamic solutions which present a property of reciprocity between the velocity field and the magnetic field are given.*

1. Formulazione del problema

Con riferimento alle equazioni indefinite *non linearizzate* della magnetofluidodinamica (MFD) per un fluido incomprimibile nel caso stazionario, indicati con $\mathbf{v}$ il campo di velocità e con $\mathbf{B}$ il campo di induzione magnetica, sia α una data struttura di $\mathbf{v}$, cioè una data dipendenza $\mathbf{v}^{(\alpha)}(\mathbf{x})$ del campo $\mathbf{v}$ dalle coordinate euleriane $\mathbf{x}$; sia β la struttura (incognita) di un particolare campo di induzione magnetica $\mathbf{B}^{(\beta)}(\mathbf{x})$ in corrispondenza al quale è possibile (almeno per quanto concerne le equazioni indefinite) un moto MFD $(\mathbf{v}^{(\alpha)}, \mathbf{B}^{(\beta)})$ (1). E' evidente che $(\mathbf{v}^{(\beta)}, \mathbf{B}^{(\alpha)})$ non è in generale un moto MFD possibile. In questa nota ci si prefigge di determinare strutture (α, β) tali che $(\mathbf{v}^{(\alpha)}, \mathbf{B}^{(\beta)})$ e $(\mathbf{v}^{(\beta)}, \mathbf{B}^{(\alpha)})$ siano moti MFD possibili: potremmo dire pertanto che per tali moti sussiste una *proprietà di reciprocità* dei campi MFD $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$.

Nella nota si perviene alla determinazione di 4 semplici classi di soluzioni (α, β) che godono della suddetta proprietà di reciprocità; per esse $\mathbf{v}^{(\alpha)}$ compete nell'ordine ai seguenti moti idrodinamicamente significativi: 1) rotazioni rigide, 2) moti per cerchi concentrici, 3) moti per eliche circolari di Strakhovitch, 4) moti di Hill.

(1) $(\mathbf{v}^{(\alpha)}, \mathbf{B}^{(\beta)})$ *soluzione esatta* MFD (cf. n. 2).

2. Equazioni di base

Le equazioni non lineari di base sono (in unità di Gauss)

$$(2.1)\qquad \mathbf{v} \wedge \omega - \operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} - U\right) + \frac{1}{4\pi\mu\rho}(\operatorname{rot}\mathbf{B}) \wedge \wedge \mathbf{B} + \nu\nabla^2 \mathbf{v} = 0$$

$$(2.2)\qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$

$$(2.3)\qquad \operatorname{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) + \nu_m \nabla^2 \mathbf{B} = 0$$

con la condizione

$$(2.4)\qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0\ .$$

In esse $\omega = \operatorname{rot}\mathbf{v}$ è il vortice, p la pressione, ρ la densità (costante), U il potenziale delle forze di massa di origine non elettromagnetica riferito all'unità di massa, μ la permeabilità magnetica (costante), ν il coefficiente di viscosità cinematica (costante), $\nu_m = c^2/4\pi\mu\sigma$ il coefficiente di viscosità magnetica (c velocità della luce nel vuoto, σ conducibilità elettrica, costante).

Le (2.1), (2.2), (2.3) costituiscono un sistema non lineare di 7 equazioni differenziali alle derivate parziali in 7 funzioni incognite scalari: le 3 componenti di $\mathbf{v}$, le 3 di $\mathbf{B}$ e p.

Prendendo il rotore di ambo i membri della (2.1) si ottiene la

$$(2.5)\qquad \operatorname{rot}(\omega \wedge \mathbf{v}) - \nu\nabla^2\omega + \frac{1}{4\pi\mu\rho}\operatorname{rot}(\mathbf{B} \wedge \operatorname{rot}\mathbf{B}) = 0\ .$$

Le equazioni (2.3) e (2.5) esprimono le condizioni caratteristiche affinché un campo di velocità $\mathbf{v}$ ed un campo magnetico $\mathbf{B}$ solenoidali competano ad un moto MFD di un fluido viscoso incomprimibile: una soluzione *esatta* solenoidale ($\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$) delle equazioni (2.3) e (2.5) sarà nel seguito riferita come *moto MFD possibile.* In analogia con la nomenclatura idrodinamica (cf. [1], p. 3) chiamiamo la (2.5) *equazione di compatibilità.*

Determinata una soluzione solenoidale ($\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$) del sistema (2.5)-(2.3), la pressione p si ricava dalla (2.1) con una quadratura. Per ragioni di

brevità, non si riporterà per le soluzioni ($\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$) date nel seguito il corrispondente calcolo esplicito di p (che peraltro può farsi senza difficoltà).

3. Rotazioni rigide

Qui e nel seguito $T(0; r, \varphi, z)$ indica una terna di coordinate cilindriche ortogonali di versori $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ e a_i e b_i ($i = 1, 2, ...$) indicano costanti arbitrarie.

Preso per $\mathbf{v}^{(\alpha)}$ il campo cinetico caratteristico di una rotazione rigida

$$\mathbf{v}^{(\alpha)} = a_1 \, r \, \mathbf{e}_\varphi \quad , \tag{3.1}$$

si verifica che il moto (3.1) è MFD possibile con

$$\mathbf{B}^{(\beta)} = (b_1 \log r + b_2) \, \mathbf{e}_z \tag{3.2}$$

e che il moto

$$\mathbf{v}^{(\beta)} = (a_2 \log r + a_3) \, \mathbf{e}_z \tag{3.3}$$

è MFD possibile con

$$\mathbf{B}^{(\alpha)} = b_3 \, r \, \mathbf{e}_\varphi \; . \tag{3.4}$$

Si noti che il campo cinetico (3.3) caratterizza un particolare moto idrodinamico di rivoluzione per rette parallele (cf. [1], p. 47).

4. Moti per cerchi concentrici

Considerata per $\mathbf{v}^{(\alpha)}$ l'espressione

$$\mathbf{v}^{(\alpha)} = (a_1 \, r + a_4/r) \, \mathbf{e}_\varphi \quad , \tag{4.1}$$

caratterizzante un particolare moto idrodinamico per cerchi concentrici (cf. [1], p. 17), si verifica che il moto (4.1) è MFD possibile con un $\mathbf{B}^{(\beta)}$ dato dalla (3.2) e che il moto $\mathbf{v}^{(\beta)}$ dato dalla (3.3) è MFD possibile con

$$\mathbf{B}^{(\alpha)} = (b_3 \, r + b_4/r) \, \mathbf{e}_\varphi \; . \tag{4.2}$$

5. Moti per eliche circolari di Strakhovitch

Considerata per $\mathbf{v}^{(\alpha)}$ l'espressione

$$(5.1) \qquad \mathbf{v}^{(\alpha)} = (a_1 \, r + a_4/r) \, \mathbf{e}_\varphi + (a_2 \, \log r + a_3) \, \mathbf{e}_z \, ,$$

caratterizzante un particolare moto idrodinamico per eliche circolari di Strakhovitch (cf. [1], p. 101), si verifica che il moto (5.1) è MFD possibile con un $\mathbf{B}^{(\beta)}$ dato dalla (3.2) e che il moto $\mathbf{v}^{(\beta)}$ dato dalla (3.3) è MFD possibile con

$$(5.2) \qquad \mathbf{B}^{(\alpha)} = (b_3 \, r + b_4/r) \, \mathbf{e}_\varphi + (b_1 \, \log r + b_2) \, \mathbf{e}_z \, .$$

6. Moti di Hill

Riferendosi, limitatamente a questo numero, al caso $\nu_m = 0$, preso per $\mathbf{v}^{(\alpha)}$ il campo cinetico caratteristico di un moto alla Hill (cf. [1], p. 54)

$$(6.1) \qquad \mathbf{v}^{(\alpha)} = -a_5 \, r z \, \mathbf{e}_r + a_5 \, (2 \, r^2 + z^2 - h^2) \, \mathbf{e}_z$$

(h costante), si verifica che il moto (6.1) è MFD possibile con un $\mathbf{B}^{(\beta)}$ dato dalla (3.4) e che il moto $\mathbf{v}^{(\beta)}$ dato dalla (3.1) è MFD possibile con

$$(6.2) \qquad \mathbf{B}^{(\alpha)} = -b_5 \, r z \, \mathbf{e}_r + b_5 \, (2 \, r^2 + z^2 - h^2) \, \mathbf{e}_z \, .$$

Osservazione. Terminiamo osservando che tutto quanto detto sopra vale inalterato anche nel caso in cui non sia trascurabile (come supposto finora) *l'effetto Hall*: infatti le (2.1), (2.2) e (2.4) restano inalterate ed il termine additivo δ rot ($\mathbf{B} \wedge$ rot $\mathbf{B}$) ($\delta = c^2 \beta_H / 4 \pi \mu$ con β_H coefficiente di Hall), dovuto a tale effetto, che compare nel primo membro della (2.3) risulta identicamente nullo in quanto che per tutti i $\mathbf{B}$ indicati nei n.i 3-6 è conservativo il campo $\mathbf{B} \wedge$ rot $\mathbf{B}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Berker R. - *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible,* Handbuch der Physik VIII/2 (1963), 1-384.

Sul calcolo approssimato dei periodi in sistemi non lineari autonomi

SILVIO NOCILLA
Dipartimento di Matematica - Politecnico di Torino

Riassunto. *Si considerano le vibrazioni libere non lineari non smorzate di sistemi con un grado di libertà, e si ricavano alcune formule approssimate che forniscono direttamente e in forma finita la dipendenza dei periodi di vibrazione dalle rispettive ampiezze. Tali formule vengono applicate ad alcuni casi concreti.*

Summary. *Free, non linear, undamped vibrations of systems with one degree of freedom are considered, and approximated formulae are obtained giving directly the vibration periods as depending on the corresponding amplitudes. Some applications to particular problems are developed.*

Introduzione

E' ben noto, v. ad es. [1] cap. 8, [4] cap. 2, che una delle proprietà tipiche dei sistemi non lineari – in contrapposizione con quelli lineari – è che i periodi propri delle oscillazioni libere non smorzate dipendono in modo essenziale dalle ampiezze di oscillazione. L'espressione analitica di tale dipendenza periodo-ampiezza non è, di regola, semplice da ottenersi, e per lo più viene calcolata con procedimenti perturbativi, dopo aver individuato un "piccolo" parametro di non linearità, v. ad es. [2], [3], [4], [5]. D'altra parte è pur noto che molti problemi di meccanica non lineare (problema dei due corpi, pendolo sferico, giroscopio pesante, etc.) si riconducono allo studio dell'equazione:

$$\ddot{x} + F(x) = 0 \tag{1}$$

o in forma equivalente:

$$\dot{x}^2 = X(x) \tag{2}$$

con:

$$X(x) = \dot{x}_0^2 - 2 \int_{x_0}^{x} F(x')\, dx' \tag{3}$$

dove x_0 e $\dot{x}_0$ sono i valori assunti dalla incognita $x(t)$ in un istante generico, che non è qui restrittivo supporre sia $t = 0$.

Lo studio di tale equazione è classico, v. ad es. [2] cap. 2. Particolarmente importante è il caso in cui x_0 sia compreso tra due zeri semplici consecutivi x_1 e x_2 della $X(x)$, cosicché sia:

$$X(x_1) = X(x_2) = 0 \quad , \quad x_1 < x_0 < x_2 \ . \tag{4}$$

In tal caso è ben noto che la $x(t)$ risulta funzione periodica di t, compresa tra i valori minimo x_1 e massimo x_2. Il valore esatto del periodo T è dato dalla formula:

$$T = 2t_{12} \quad ; \quad t_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{X(x)}} \tag{5}$$

essendo t_{12} il tempo impiegato ad andare da x_1 a x_2, o viceversa. Nel presente lavoro ricaveremo alcune formule approssimate che forniscono direttamente e in *forma finita* la dipendenza di T da x_1 e x_2, dipendenza che risulta tanto più marcata quanto più la $F(x)$ si allontana dall'andamento lineare, ma che nella formulazione qui adottata non richiede nessuna assunzione di "piccola" non linearità. Applicheremo poi tali formule ad alcuni casi concreti.

1. Studio del caso con $F(x)$ qualsiasi, purché integrabile, monotona, crescente

Osserviamo anzitutto che da (3) e (4) otteniamo:

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx = 0 \tag{6}$$

e pertanto si può pensare di *assumere ad arbitrio* x_1, anziché $\dot{x}_0$, e quindi determinare x_2 in base alla (6) stessa. Data la supposta monotonia della $F(x)$ risulta anche che deve essere:

$$(7) \qquad F(x_1) < 0 \quad ; \quad F(x_2) > 0$$

e che sussistono le seguenti diseguaglianze per $x \in [x_1, x_2]$:

$$(8) \qquad \begin{cases} F(x_1) F(x) \leqslant F^2(x_1) \quad ; \quad F(x_2) F(x) \leqslant F^2(x_2) \\ [F(x_1) + F(x_2)] F(x) < F^2(x_1) + F^2(x_2) \ . \end{cases}$$

Ciò premesso effettuiamo il seguente cambiamento di funzione incognita:

$$(9) \qquad z = x + a + b \ X(x)$$

con a e b costanti da determinarsi.

Derivando rispetto al tempo e quadrando otteniamo, tenuto anche conto della (2):

$$(10) \qquad \dot{z}^2 = Z(z)$$

con

$$(11) \qquad Z(z) = [1 + b \ X'(x)]^2 \ X(x)$$

essendo la x univocamente ottenibile dalla z mediante la (9), poiché la z risulta funzione invertibile della x, come dimostreremo. Imponiamo ora le due condizioni seguenti:

1°) in corrispondenza di $x = x_1$, e $x = x_2$, la z deve assumere due *valori eguali e opposti* $\pm z^*$, ossia:

$$(12) \qquad \text{per} \begin{cases} x = x_1 \ , \quad z = -z^* \\ x = x_2 \ , \quad z = z^* \end{cases} \qquad z^* > 0$$

2°) in corrispondenza degli stessi valori deve essere:

$$(13) \qquad Z'(z^*) = -Z'(-z^*) \ .$$

Dalla (11) si ricava poi immediatamente, tenuto conto di (4):

$$(14) \qquad Z(-z^*) = Z(z^*) = 0 \ .$$

Imponendo le condizioni suddette otteniamo per a e b i seguenti valori:

$$(15)\quad \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)\ , \quad \text{e quindi: } z^*=\dfrac{1}{2}(x_2-x_1) \\ b=-\dfrac{X'(x_1)+X'(x_2)}{X'^2(x_1)+X'^2(x_2)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{F(x_1)+F(x_2)}{F^2(x_1)+F^2(x_2)} \end{cases}$$

e quindi:

$$(16)\qquad Z'(z^*)=2F(x_1)F(x_2)\,\frac{F(x_2)-F(x_1)}{F^2(x_1)+F^2(x_2)}\ .$$

In base al valore ottenuto per b possiamo ora dimostrare che la (9) è invertibile; infatti risulta:

$$(17)\qquad \frac{dz}{dx}=1+bX'(x)=1-\frac{F(x_1)+F(x_2)}{F^2(x_1)+F^2(x_2)}\,F(x)>0$$

in base all'ultima diseguaglianza (8).

Il passo successivo consiste nell'approssimare la $Z(z)$ con la parabola:

$$(18)\qquad Z(z)\cong K(z^{*2}-z^2)$$

che soddisfa ovviamente alle (12) e (13). Il valore di K si ricava dalle (15) 1° e (16), ossia:

$$(19)\qquad K=-\frac{1}{2}\,\frac{Z'(z^*)}{z^*}=-2\,\frac{F(x_2)-F(x_1)}{(x_2-x_1)}\,\cdot$$

$$\cdot\ \frac{F(x_1)\,F(x_2)}{F^2(x_1)+F^2(x_2)}\ .$$

Ma l'equazione (10), col valore approssimato di $Z(z)$ dato dalle (18) e (19), si integra immediatamente dando luogo al moto armonico:

$$(20)\qquad z=z^*\sin(\sqrt{K}\,t+\alpha)$$

con α costante di integrazione, calcolabile ad esempio con la condizione che sia $x = x_0$ per $t = 0$, da cui:

$$x_0 + a + b\, X(x_0) = z^* \sin\alpha \ . \tag{21}$$

La soluzione approssimata $x(t)$ è allora data in forma implicita da:

$$x + a + b\, X(x) = z^* \sin(\sqrt{K}\, t + \alpha) \ . \tag{22}$$

Il corrispondente periodo approssimato vale:

$$\boxed{T^{(1)} = 2\pi \sqrt{-\frac{1}{2}\ \frac{x_2 - x_1}{F(x_2) - F(x_1)} \left(\frac{F(x_1)}{F(x_2)} + \frac{F(x_2)}{F(x_1)}\right)}} \tag{23}$$

che può anche essere scritto nella forma equivalente:

$$T^{(1)} = 2\pi \sqrt{\frac{x_2 - x_1}{F(x_2) - F(x_1)} \left[1 + \frac{(F(x_1) + F(x_2))^2}{-2F(x_1)F(x_2)}\right]} \ . \tag{23'}$$

Il rapporto:

$$K_{12} = \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{24}$$

si può interpretare come una "rigidezza equivalente" tra x_1 e x_2, mentre il fattore entro parentesi quadre nella (23′) risulta sempre maggiore di uno in virtù delle (7).

Osservazione. Nel caso *lineare non simmetrico* in cui sia:

$$F(x) = x + \lambda$$

risulta dalla (6), essendo $x_1 \neq x_2$:

$$x_1 + x_2 + 2\lambda = 0 \quad , \quad F(x_1) + F(x_2) = 0 \quad \text{etc.}$$

per cui la (23′) fornisce il valore esatto del periodo:

$$T^{(1)} = T = 2\pi.$$

Applicazioni.

1°) Sia:

$$F(x) = K_1 x + K_2 x^2 \quad (K_1 > 0) \tag{25}$$

per valori di x tali che:

$$F'(x) \equiv K_1 + 2K_2 x > 0 \ . \tag{26}$$

Assumendo $x_0 = 0$ risulta:

$$X(x) = x_0^2 - K_1 x^2 - 2K_2 \frac{x^3}{3} \tag{27}$$

e siano $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$ due valori per cui la $X(x)$ si annulla. La rigidezza equivalente (24) vale in questo caso:

$$K_{12} = K_1 \left[1 + \frac{K_2}{K_1} (x_1 + x_2) \right] \tag{28}$$

mentre dalla (6) si ricava:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2}{3} \frac{K_2}{K_1} (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) < 0 \tag{29}$$

e quindi:

$$\frac{K_2}{K_1} (x_1 + x_2) < 0 \ . \tag{30}$$

Dalla (28) consegue allora:

$$K_{12} < K_1 \tag{31}$$

e quindi dalla (23′), tenuto anche conto delle (7):

$$(32)\quad T^{(1)} = 2\pi \sqrt{\frac{1/K_1}{1 + (K_2/K_1)(x_1 + x_2)} \left[1 + \frac{(F(x_1) + F(x_2))^2}{-2F(x_1)F(x_2)} \right]} > T_0$$

dove:

$$T_0 = 2\pi/\sqrt{K_1}$$

è il periodo corrispondente al caso lineare $K_2 = 0$. Dunque il periodo T_0 del caso lineare è *il più piccolo di tutti i periodi* $T^{(1)}$ corrispondenti ai valori di K_2 positivi, negativi o nulli, prossimi allo zero. Appare lecito congetturare che questa proprietà di minimo, dimostrata per il periodo approssimato $T^{(1)}$, sia vera anche per il periodo esatto T.

2°) Consideriamo il moto di un punto, di massa unitaria, soggetto ad una forza centrale $f(\rho)$. Sussistono come ben noto i due integrali primi.

$$(33)\quad \begin{cases} \rho^2\,\dot{\vartheta} = \text{costance} = c = 2a & [a = \text{velocità arcolare}] \\ \dfrac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\vartheta}^2) = U(\rho) = E \end{cases}$$

con:

$$(34)\quad U(\rho) = \int_{\bar{\rho}}^{\rho} f(\rho')\,d\rho'$$

con le condizioni iniziali:

$$(35)\quad \text{per}\quad t = 0 \quad \begin{cases} \rho = \rho_0 \\ \vartheta = \vartheta_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\rho} = \dot{\rho}_0 \\ \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0 \end{cases}$$

Eliminando $\dot{\vartheta}$ abbiamo:

$$(36)\quad \dot{\vartheta} = c/\rho^2 \quad ; \quad \dot{\rho}^2 = R(\rho)$$

con:

(37) $$R(\rho) = 2E + 2U(\rho) - c^2/\rho^2$$

e quindi:

(38) $$\ddot{\rho} + F(\rho) = 0$$

con:

(39) $$F(\rho) = -\frac{1}{2} R'(\rho) = -[f(\rho) + c^2/\rho^3] \ .$$

Supponiamo che ρ_0 sia compreso tra due zeri semplici consecutivi di $R(\rho)$, ossia:

(40) $$R(\rho_1) = R(\rho_2) \quad , \quad \rho_1 < \rho_0 < \rho_2$$

e che $F(\rho)$ sia monotona crescente per $\rho \in [\rho_1, \rho_2]$.

In virtù delle (34) e (37), la (40) si può scrivere:

(41) $$\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho)\, d\rho = \frac{1}{2} c^2 \left(\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right)$$

in cui possiamo supporre ρ_1 arbitrario e ρ_2 calcolato in base alla (41) stessa. La funzione $\rho(t)$ risulta periodica, con un periodo T che in prima approssimazione vale, v. (23):

(42) $$T^{(1)} = 2\pi \sqrt{-\frac{1}{2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{F(\rho_2) - F(\rho_1)} \left[\frac{F(\rho_1)}{F(\rho_2)} + \frac{F(\rho_2)}{F(\rho_1)} \right]} \ .$$

Inoltre, quadrando la prima delle (33) e dividendo membro a membro con la seconda delle (36) abbiamo:

(43) $$\left(\frac{dz}{d\vartheta} \right)^2 = \frac{R(1/z)}{c^2}$$

avendo introdotta in luogo di ρ la nuova funzione:

(44) $$z(t) = 1/\rho(t)$$

da cui infine:

$$\frac{d^2 z}{d\vartheta^2} + H(z) = 0 \tag{45}$$

con

$$H(z) = \frac{1}{2c^2 z^2} R'(1/z) = z + \frac{1}{c^2} \frac{f(1/z)}{z^2} \quad . \tag{46}$$

Dalle (40) e (44) risulta che la $R(1/z)$ si annulla per:

$$z = z_1 = 1/\rho_1 \quad , \quad \text{e} \quad z = z_2 = 1/\rho_2 \ . \tag{47}$$

La funzione $z = g(\vartheta)$ soddisfacente alla (43) nelle condizioni (40) e (47) risulta *periodica* con un periodo $\Delta\vartheta$ rispetto a ϑ, che in prima approssimazione vale, v. (23):

$$\Delta\vartheta^{(1)} = 2\pi \sqrt{-\frac{1}{2} \frac{z_2 - z_1}{H(z_2) - H(z_1)} \left[\frac{H(z_1)}{H(z_2)} + \frac{H(z_2)}{H(z_1)}\right]} \ . \tag{48}$$

Mentre la ρ compie, nel periodo T, un'oscillazione completa compresa tra ρ_1 e ρ_2, la ϑ si incrementa dell'angolo $\Delta\vartheta$; le (42) e (48) danno i valori approssimati $T^{(1)}$ di T e $\Delta\vartheta^{(1)}$ di $\Delta\vartheta$.

Nel caso della forza di gravitazione universale: $f(\rho) = -K/\rho^2$ risulta:

$$\begin{cases} F(\rho) = K/\rho^2 - c^2/\rho^3 & (39') \\ H(z) = z - K/c^2 & (46') \end{cases}$$

e quindi, in base all'osservazione del n. 1 relativa al caso lineare non simmetrico, la (48) fornisce il valore esatto:

$$\Delta\vartheta^{(1)} = \Delta\vartheta = 2\pi.$$

2. Studio del caso di $F(x)$ simmetrica dispari

Supponiamo ora che sia:

$$F(x) = -F(-x) \quad , \quad \text{e quindi:} \quad x_2 = -x_1 = x^* > 0 \ . \tag{49}$$

La formula (23) diventa semplicemente:

$$T^{(1)} = 2\pi \sqrt{\frac{x^*}{F(x^*)}} \tag{50}$$

e mostra che nel caso in cui la rigidezza cresce con l'ampiezza (detto "hardening"), in cui cioè il rapporto $F(x^*)/x^*$ cresce con x^*, allora $T^{(1)}$ risulta funzione decrescente dell'ampiezza, mentre nel caso opposto (detto "softening") $T^{(1)}$ risulta funzione crescente dell'ampiezza. La formula (50) può essere migliorata nel modo seguente. Nell'ipotesi (49) non è necessario ricorrere alla trasformazione (9) perché risulta già automaticamente:

$$X'(x^*) = -X'(-x^*) \ . \tag{51}$$

Il periodo T dato dalla (5) si può ora scrivere:

$$T = 4 \int_0^{x^*} \frac{dx}{\sqrt{X(x)}} = 2\sqrt{2} \int_0^{x^*} \frac{dx}{\sqrt{U(x^*) - U(x)}} \tag{52}$$

con:

$$U(x) = \int_0^x F(x')\, dx', \quad \text{da cui:} \quad x_0^2 = 2U(x^*) \ . \tag{53}$$

Ma essendo la $F(x)$ dispari, il potenziale $U(x)$ risulterà *pari* in x, e quindi potremo scrivere:

$$U(x) = g(y) \quad , \quad \text{con} \quad y = x^2 \tag{54}$$

e inoltre dalla (52):

$$T = 2\sqrt{2} \int_0^{x^*} \frac{dx}{\sqrt{g(y^*) - g(y)}} \quad , \text{con} \quad y^* = x^{*2} \tag{55}$$

essendo $g(y)$ una funzione *regolare* del suo argomento, se tale è la $F(x)$. *Approssimiamo* allora la $g(y)$ mediante la formula di Mc Laurin:

$$g(y) \cong g(y^*) + g'(y^*)(y - y^*) + g''(y^*) \frac{(y - y^*)^2}{2} \quad . \tag{56}$$

Otteniamo così:

$$g(y^*) - g(y) \cong g'(y^*)(x^{*2} - x^2)\left[1 - \frac{1}{2} \frac{g''(y^*)}{g'(y^*)} (x^{*2} - x^2)\right]$$

e quindi ancora:

$$[g(y^*) - g(y)]^{-1/2} \cong$$

$$\cong \frac{1}{\sqrt{g'(y^*)(x^{*2} - x^2)}} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{g''(y^*)}{g'(y^*)} (x^{*2} - x^2)\right]$$

da cui la 2ª approssimazione per il periodo:

$$T^{(2)} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{\sqrt{g'(y^*)}} \left[1 + \frac{x^{*2}}{8} \frac{g''(y^*)}{g'(y^*)}\right] \quad . \tag{57}$$

Ma risulta dalle (53) e (54):

$$\begin{cases} g'(y^*) = \dfrac{U'(x^*)}{2x^*} = \dfrac{F(x^*)}{2x^*} \\[2ex] g''(y^*) = \dfrac{1}{4x^{*2}} \left[F'(x^*) - \dfrac{F(x^*)}{x^*}\right] \end{cases} \tag{58}$$

e quindi la definitiva:

$$\boxed{T^{(2)} = 2\pi \sqrt{\frac{x^*}{F(x^*)}} \left\{1 + \frac{1}{16}\left[\frac{x^* F'(x^*)}{F(x^*)} - 1\right]\right\}} \tag{59}$$

Applicazioni:

3°) *Pendolo semplice:*
$$\begin{cases} \ddot{x} + \sigma^2 \sin x = 0 \\ F(x) = \sigma^2 \sin x \end{cases} \quad , \quad \sigma = \sqrt{g/l}$$

$$\begin{cases} T^{(1)} = \dfrac{2\pi}{\sigma} \sqrt{\dfrac{x^*}{\sin x^*}} \\ T^{(2)} = \dfrac{2\pi}{\sigma} \sqrt{\dfrac{x^*}{\sin x^*}} \left\{ 1 + \dfrac{1}{16} \left[\dfrac{x^* \cos x^*}{\sin x^*} - 1 \right] \right\} \end{cases} \tag{60}$$

E' notevole il fatto che già la 1ª) approssimazione fornisce il valore (esatto) infinito per $x = \pi$. A titolo di esempio riportiamo i valori approssimati ed esatto del rapporto T/T_0 per $x^* = \pi/2$, essendo $T_0 = 2\pi/\sigma$ il periodo delle piccole oscillazioni.

Risulta:

$T^{(1)}/T_0$	$\sqrt{\pi/2} = 1.2533$
$T^{(2)}/T_0$	$\sqrt{\pi/2} \cdot 15/16 = 1.1750$
T/T_0	1.1804

4°) $\ddot{x} + K_n \; sgn \; x \; |x|^n = 0 \quad , \quad n \in R^+$.

Dalle (50) e (59) si ottiene:

$$\begin{cases} T^{(1)} = 2\pi \sqrt{\dfrac{(x^*)^{1-n}}{K_n}} \\ T^{(2)} = 2\pi \sqrt{\dfrac{(x^*)^{1-n}}{K_n}} \left[1 + \dfrac{1}{16} (n-1) \right] \end{cases} .$$

Ad esempio, se $K_n = 1$

per $n = 3$: $T^{(1)} = \dfrac{2\pi}{x^*}$, $T^{(2)} = \dfrac{9}{4} \dfrac{\pi}{x^*}$

per $n = 1/2$: $T^{(1)} = 2\pi \sqrt[4]{x^*}$, $T^{(2)} = \dfrac{31}{16} \pi \sqrt[4]{x^*}$

per $n = 3/2$: $T^{(1)} = 2\pi / \sqrt[4]{x^*}$, $T^{(2)} = \dfrac{33}{16} \pi / \sqrt[4]{x^*}$.

I corrispondenti grafici dei periodi in funzione dell'ampiezza sono riportati nelle figg. 1, 2, 3, dove pure sono riportati i valori dei periodi calcolati mediante integrazione numerica. L'accordo, soprattutto nella seconda approssimazione $T^{(2)}$, appare molto buono.

BIBLIOGRAFIA

[1] DEN HARTOG - *Mechanical Vibrations,* Mc. Graw Hill Book Co. (1956).

[2] MINORSKY - *Non linear oscillations,* Krieger Pub. Co., New York (1974).

[3] BOGOLIUBOV-MITROPOLSKY, *Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations,* Gauthier Villars, Paris (1962).

[4] NAYFEH - MOOK - *Non linear oscillations,* J. Wiley, New York (1979).

[5] HAGEDORN - *Non linear oscillations,* Clarendon Press, Oxford (1981).

Figura 1

15
T
• integrazione numerica
$T^{(1)}$
10
$T^{(2)}$
5
$\ddot{x} + \operatorname{sgn} x \sqrt{|x|} = 0$
$n = 1/2$
0
5
x^*
10

Figura 2

15
T
● integrazione numerica
$\ddot{x} + x\sqrt{|x|} = 0$
10
$n = 3/2$
$T^{(2)}$
5
$T^{(1)}$
0
5
x^* 10

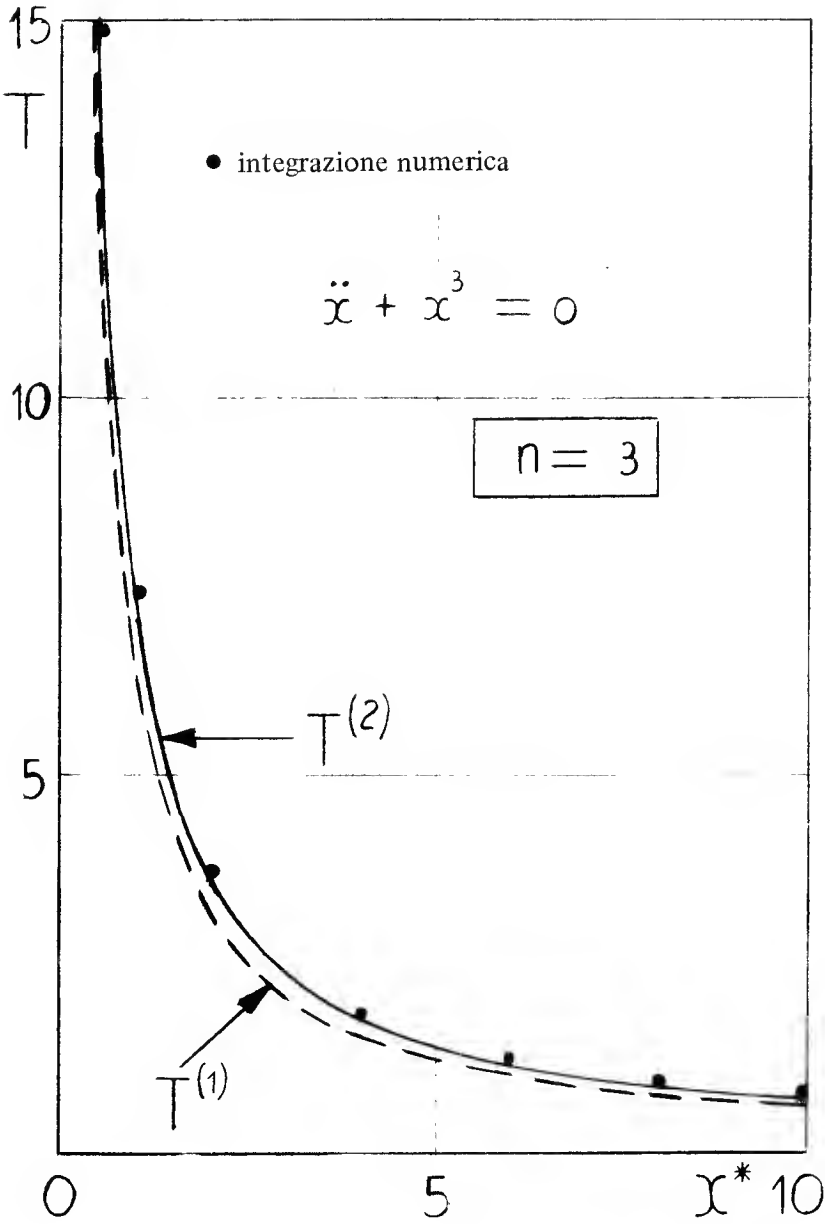
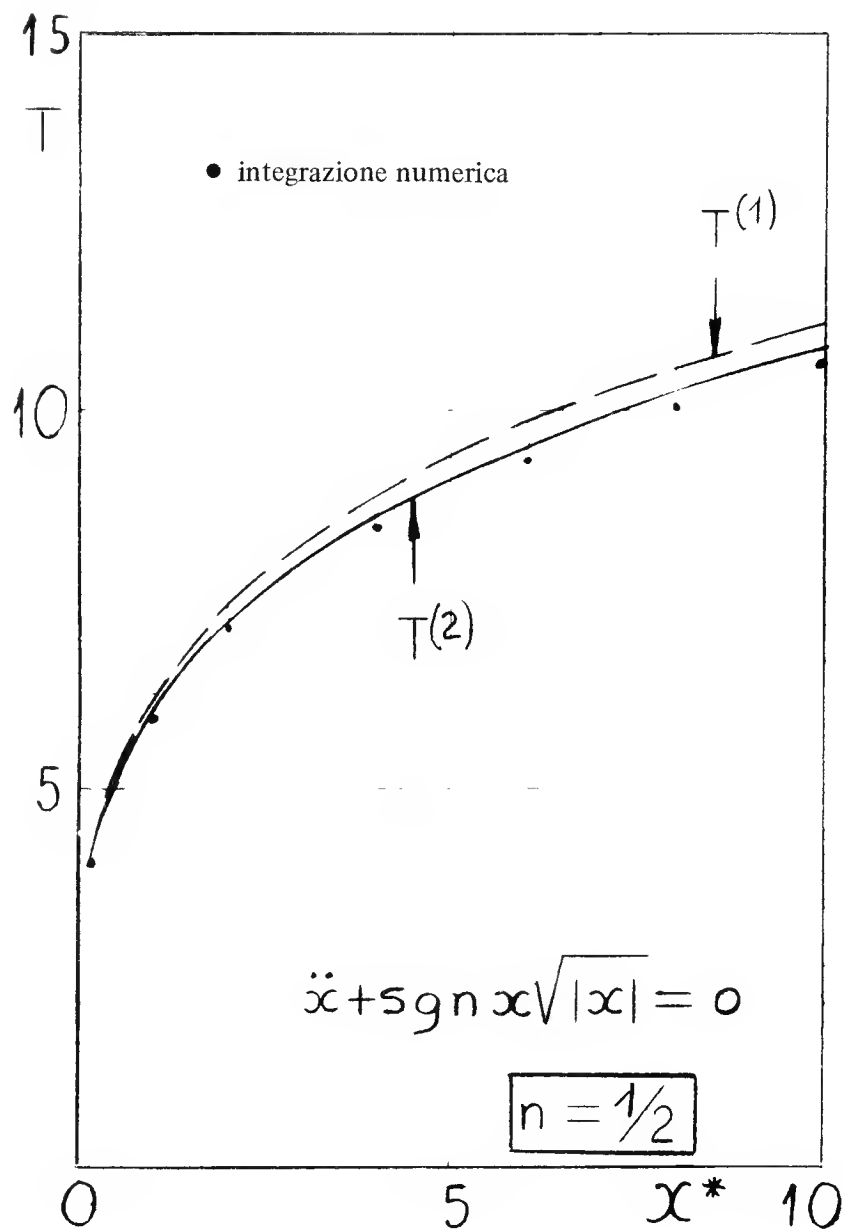
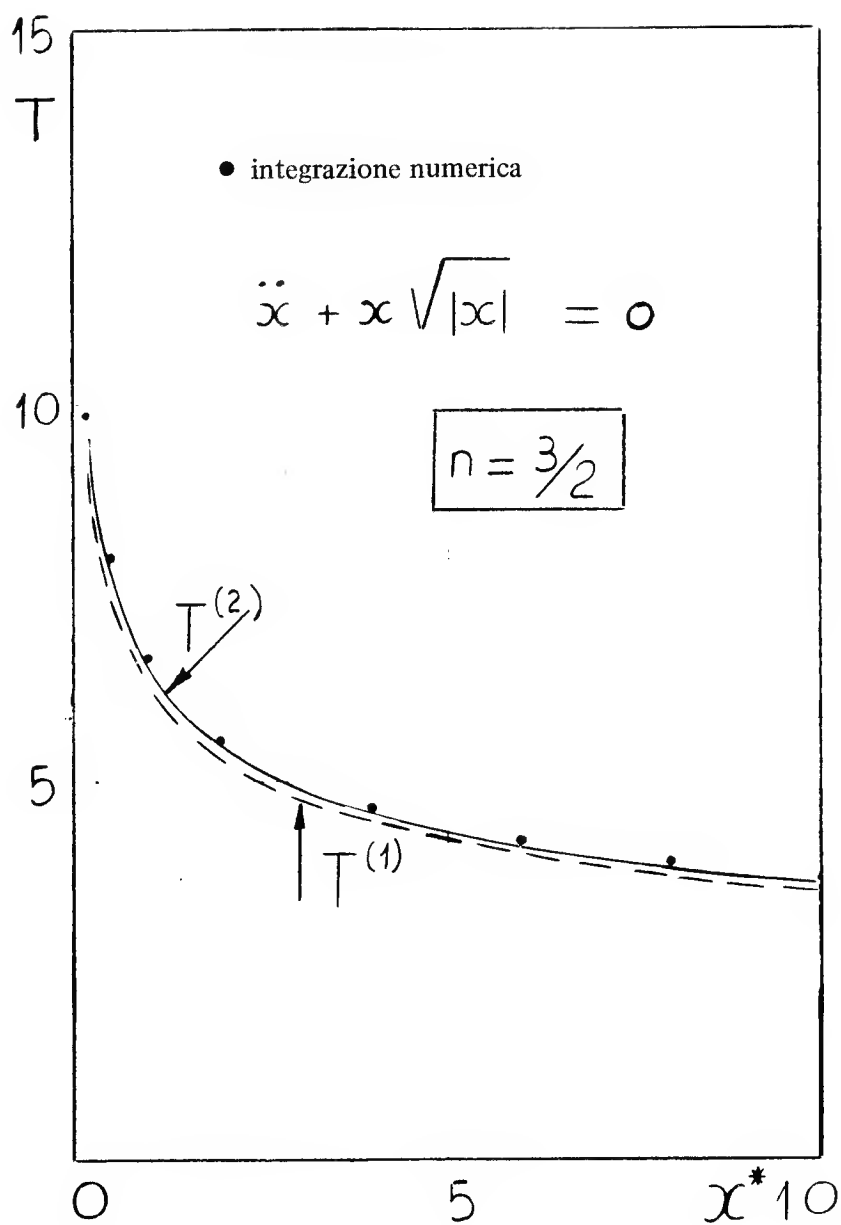



Figura 3

Considerazioni sull'equazione di moto della particella con massa variabile e riducibilità a forma classica del teorema del moto del baricentro (*)

E. Oliveri
Dipartimento di Matematica - Università di Catania

Sunto. *In questa Nota partendo dalle equazioni di moto della particella con massa variabile che traducono il teorema dell'accelerazione e quello dell'impulso si deducono i teoremi della quantità di moto, dell'impulso e del momento della quantità di moto comparandone i risultati. Per i sistemi particellari inoltre si trova una condizione per la riducibilità in forma classica del teorema del moto del baricentro.*

1. - Fino alla metà dell'800 la massa dei corpi era stata considerata costante nel tempo e invariante rispetto al loro moto. Intorno al 1866 E. Halley ha trovato delle discrepanze fra i valori osservati e quelli calcolati dalla precessione secolare della longitudine della Luna. Precisamente egli notò una diminuzione nel periodo di rivoluzione della Luna attorno alla Terra, ovvero un aumento nella sua velocità orbitale media che numericamente è espressa dall'aumento in precessione. Ritenendo che ciò fosse dovuto alla variazione delle masse della Terra e della Luna, Halley propose di studiare il problema supponendo la massa non più costante ma funzione del tempo. Successivamente altri astronomi come Gylden, Armellini, Eddington, Jeans, Brown ed altri, pur lavorando nell'ambito della meccanica newtoniana, concordemente hanno ritenuto che per una corretta descrizione del moto dei corpi celesti bisogna tener conto della variabilità nel tempo della loro massa.

Naturalmente il problema interessò presto i fisici matematici i quali si proposero di mettere a punto un modello matematico atto a descrivere nello schema newtoniano i fenomeni meccanici dei corpi con massa variabile.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R. col contributo del M.P.I.

I primi lavori sull'argomento sono quelli di T. Levi-Civita (1928), E. Fermi (1929), A. Sommerfeld (i cui risultati già contenuti negli appunti delle sue lezioni furono pubblicati solo nel 1942), Meshcherskii (i cui risultati secondo Kosmodem'yanskii risalgono al 1897), D. Graffi (1930), C. Agostinelli (1937) [1].

Dal 1940 ad oggi la letteratura sull'argomento è abbastanza vasta.

2. - Nella meccanica newtoniana l'equazione di moto di una particella P di massa m si può formulare sotto due diversi aspetti: uno traduce il teorema dell'accelerazione, l'altro quello dell'impulso [2]. Pertanto, con chiaro significato dei simboli, si scrive:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} . \tag{2}$$

Evidentemente, essendo la massa m costante, la (1) e la (2) sono equivalenti ed entrambe si possono assumere anche come definizione della forza agente sulla particella.

Se la massa m non è costante, ma varia nel tempo perché P espelle o cattura particelle, le due equazioni classiche del moto (1) e (2) assumono le forme:

$$m(t)\,\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^C, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}[m(t)\,\mathbf{v}] = \mathbf{F} + \mathbf{F}^C + \mathbf{F}^T , \tag{4}$$

dove si è posto

$$\mathbf{F}^C = \frac{dm}{dt}\mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{F}^T = \frac{dm}{dt}\mathbf{v} , \tag{5a-b}$$

avendo indicato con $\mathbf{u}$ la velocità del baricentro delle particelle espulse o catturate rispetto al riferimento solidale con la particella P.

Le (5a-b) rappresentano rispettivamente la forza convettiva che in-

sorge nell'istante in cui le particelle si staccano o vengono catturate da P ed il vettore dovuto al moto di trasporto.

Indicata con $\mathbf{V}$ la velocità assoluta del baricentro delle particelle espulse o catturate, la (4) assume la forma

$$\frac{d}{dt}[m(t)\,\mathrm{v}] = \mathbf{F} + \dot{m}\mathbf{V}$$

che si suole chiamare equazione di Sommerfeld.

Per semplicità, posto

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^C \quad , \quad \mathbf{R}^* = \mathbf{F} + \mathbf{F}^C + \mathbf{F}^T \quad ,$$

scriveremo le (3) e (4) nella forma

$$m\mathrm{a} = \mathbf{R} \quad , \tag{6}$$

$$\frac{d(m\mathrm{v})}{dt} = \mathbf{R}^* \quad . \tag{7}$$

Osservando che anche nella Meccanica della massa variabile, tutte le quantità dinamiche hanno la medesima formulazione classica, poniamo la nostra attenzione sulle tre quantità

$$\mathbf{Q} = m\mathrm{v} \; , \tag{8}$$

$$\mathbf{K}_O = (P - O) \wedge m\mathrm{v} \quad , \tag{9}$$

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{R}dt \; , \tag{10}$$

che rappresentano rispettivamente la quantità di moto, il momento rispetto ad O della quantità di moto del punto P di massa $m(t)$ e l'impulso della forza $(\mathbf{R}, P)$.

Osserviamo immediatamente che in virtù della (8), la (7) diviene

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^* \quad , \tag{11}$$

la quale esprime ancora il teorema della quantità di moto, ma solo formalmente si identifica con quella della massa costante

$$(11') \qquad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F} \ ,$$

la quale, a sua volta, si identifica con l'equazione di moto del punto di massa costante. Si noti che, mentre nella (11′) per $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ si ottiene la legge d'inerzia, dalla (11) per $\mathbf{R}^* = \mathbf{0}$ si ottiene la costanza della quantità di moto, ma non più la legge d'inerzia. Questo divario è giustificato dal fatto che al secondo membro della (11) figura il vettore $\mathbf{F}^T$ che, pur avendo le dimensioni di una forza, non ha caratteristiche di forza motrice.

Vediamo ora quali nuovi aspetti assume il teorema dell'impulso.

Dalla (7), integrando si ottiene

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{R}^* dt = \int_{t_0}^{t} d(m\mathbf{v}) = m(t)\,\mathbf{v} - m(t_0)\,\mathbf{v}_0$$

da cui, posto

$$(12) \qquad \mathbf{I}^* = \int_{t_0}^{t} \mathbf{R}^* dt \ ,$$

segue

$$(13) \qquad \mathbf{I}^* = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0 \ .$$

La (13), che sembra esprimere il teorema dell'impulso nella Meccanica della massa variabile, si identifica solo formalmente col risultato classico. Si osservi infatti che $\mathbf{I}^*$ è un pseudo impulso in quanto $(\mathbf{R}^*, P)$, per la presenza del vettore $\mathbf{F}^T$, non rappresenta una forza motrice.

Dalla (6) si ha invece

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{R} dt = \int_{t_0}^{t} m(t)\, d\mathbf{v} = m(t)\,\mathbf{v} - m(t_0)\,\mathbf{v}_0 - \int_{m_0}^{m} \mathbf{v}\, dm$$

da cui, posto

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{R}dt \quad , \tag{14}$$

segue

$$\mathbf{I} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0 - \int_{m_0}^{m} \mathbf{v}dm \quad . \tag{15}$$

La (15), essendo $(\mathbf{R}, P)$ la vera forza motrice, esprime l'effettivo teorema dell'impulso nella Meccanica della massa variabile. Pertanto, se la massa è variabile, l'impulso della forza attiva agente sul punto P, nell'intervallo di tempo (t_0, t), differisce dalla relativa variazione della quantità di moto a meno dell' $\int_{m_0}^{m} \mathbf{v}dm$.

Moltiplicando vettorialmente a sinistra per $P - O$ ambo i membri della (6), si ottiene

$$(P - O) \wedge \mathbf{R} = (P - O) \wedge m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

che, se O è un punto fisso, si scrive

$$(P - O) \wedge \mathbf{R} = m \frac{d}{dt} [(P - O) \wedge \mathbf{v}] \quad . \tag{16}$$

Introducendo il vettore velocità areale del punto P rispetto ad O, la (16) diviene

$$(P - O) \wedge \mathbf{R} = 2m \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad , \tag{17}$$

la quale esprime la seguente proposizione: se la massa di un punto P è variabile, il momento di $(\mathbf{R}, P)$ rispetto ad un polo fisso O è uguale al doppio prodotto della massa di P per la derivata temporale del vettore velocità areale di P rispetto ad O.

Se la forza $(\mathbf{R}, P)$ è centrale rispetto ad C, dalla (17) segue

$$(18) \qquad \mathbf{A} = \mathbf{cost}\ .$$

Allora il punto P, come nel caso in cui la massa è costante, si muove di moto piano con velocità areale costante.

Moltiplicando vettorialmente a sinistra per $P - O$ ambo i membri della (7), si ottiene

$$(P - O) \wedge \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = (P - O) \wedge \mathbf{R}^*$$

che, essendo O un punto fisso, si scrive

$$(18) \qquad \frac{d}{dt}[(P - O) \wedge m\mathbf{v}] = (P - O) \wedge \mathbf{R}^*\ .$$

La (18), per la (9), assume la forma

$$(19) \qquad \frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = (P - O) \wedge \mathbf{R}^*\ .$$

La (19), per la presenza nella $\mathbf{R}^*$ del vettore $\mathbf{F}^T$, esprime ancora formalmente il teorema classico del momento della quantità di moto.

Se $(\mathbf{R}^*, P)$ è centrale rispetto ad O, dalla (18) segue

$$(P - O) \wedge m\mathbf{v} = \mathbf{cost}\ .$$

Pertanto, quando si verifica questa circostanza, P si muove di moto piano, ma, non essendo costante la massa, la sua velocità areale rispetto ad O non è costante.

3. - Consideriamo una figura materiale S costituita da N punti a massa variabile $[P_i, m_i(t)]$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Una figura così fatta la chiameremo sistema particellare a massa variabile.

Introduciamo quindi le seguenti quantità di cui in seguito faremo uso:

$$(20) \qquad m = \sum_{1}^{N}{}_i\, m_i \ ,$$

$$(21) \qquad \mathbf{Q} = \sum_{1}^{N}{}_i\, m_i\, \mathbf{v}_i \ ,$$

$$(22) \qquad \mathbf{K}_O = \sum_{1}^{N}{}_i\, (P_i - O) \wedge m_i\, \mathbf{v}_i \ ,$$

$$(23) \qquad G - O = \frac{1}{m} \sum_{1}^{N}{}_i\, m_i\, (P_i - O) \ ,$$

che rispettivamente esprimono, per il sistema S, la massa totale, la quantità di moto, il momento delle quantità di moto ed il baricentro.

Assieme a queste quantità note introduciamo il baricentro G^* del sistema associato al sistema S, intendendo per sistema associato ad S il sistema particellare S^* costituito dagli stessi punti P_i di S ai quali si attribuiscono le variazioni dm_i delle masse m_i nell'intervallo di tempo infinitesimo dt [3]. Il baricentro G^* che ha un ruolo molto importante nella dinamica della massa variabile per semplificare numerosi procedimenti e chiarire il senso fisico di tanti risultati, conformemente alla definizione classica è dato dalla relazione

$$(24) \qquad G^* - O = \frac{1}{dm} \sum_{1}^{N}{}_i\, dm_i\, (P_i - O) \ ,$$

dove naturalmente $dm = \sum_{1}^{N}{}_i\, dm_i$, variazione della massa di S nell'intervallo di tempo dt, deve ritenersi non nulla.

Dalla (24), dividendo numeratore e denominatore del secondo membro per dt, segue

$$(25) \qquad G^* - O = \frac{1}{\dot{m}} \sum_{1}^{N}{}_i\, \dot{m}_i\, (P_i - O) \ .$$

Tenendo conto delle (21), (23) e (25) si ottiene facilmente

$$(26) \qquad \mathbf{Q} = m\mathbf{v}_G + \dot{m}\,(G - G^*) \ .$$

Questa importante relazione che lega la quantità di moto di S con quella del suo baricentro quando questo si considera punto materiale con la massa di S, si riduce alla relazione classica

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v}_G \tag{27}$$

quando il baricentro G^* di S^* coincide in ogni istante col baricentro G di S.

Con riferimento alla formulazione (4), procedendo in modo classico, seguono facilmente:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R} + \mathbf{R}^C + \mathbf{R}^T \quad , \tag{28}$$

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = -\mathbf{v}_O \wedge \mathbf{Q} + \mathbf{M}_O + \mathbf{M}_O^C + \mathbf{M}_O^T \quad , \tag{29}$$

dove si è posto

$$\mathbf{R}^C = \sum_1^N{}_i \, \dot{m}_i \, \mathbf{u}_i \quad , \qquad \mathbf{R}^T = \sum_1^N{}_i \, \dot{m}_i \, \mathbf{v}_i \quad ,$$

$$\mathbf{M}_O^C = \sum_1^N{}_i \, (P_i - O) \wedge \dot{m}_i \, \mathbf{u}_i \quad , \qquad \mathbf{M}_O^T = \sum_1^N{}_i \, (P_i - O) \wedge \dot{m}_i \, \mathbf{v}_i \quad .$$

Le (28) e (29) estendono formalmente ai sistemi con massa variabile i teoremi classici della quantità di moto e del momento delle quantità di moto.

Nel caso in cui il punto O è fisso o in quello particolare in cui è $O \equiv G \equiv G^*$, in virtù della (27) la (29) diviene

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O + \mathbf{M}_O^C + \mathbf{M}_O^T \quad . \tag{30}$$

Le (28) e (30) si assumono come equazioni cardinali dei sistemi con massa variabile.

4. - Derivando rispetto al tempo la (26) e tenendo conto della (28) si ottiene

$$ma_G = \mathbf{R} + \mathbf{R}^C + \mathbf{R}^T - m\mathbf{v}_G - \frac{d}{dt}[m(G - G^*)] \; . \tag{31}$$

Si osservi che, mentre la (26) per $G^* \equiv G$ si riduce alla forma classica (27), la (31) non acquista forma classica per la presenza a secondo membro dei termini dovuti al moto di trasporto delle particelle e del baricentro stesso del sistema S.

Per $G \equiv G^*$ infatti la (31) diviene

$$ma_G = \mathbf{R} + \mathbf{R}^C + \mathbf{R}^T - \dot{m}\mathbf{v}_G \; ,$$

che si riduce alla forma classica

$$ma_G = \mathbf{R} + \mathbf{R}^C \tag{32}$$

solamente se è soddisfatta la seguente condizione

$$\sum_1^N {}_i \dot{m}_i \mathbf{v}_i - \dot{m}\mathbf{v}_G = 0 \; . \tag{33}$$

Nell'ipotesi $G \equiv G^*$ dalla (25) derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\ddot{m}(G - O) + \dot{m}\mathbf{v}_G = \sum_1^N {}_i \ddot{m}_i (P_i - O) + \sum_1^N {}_i \dot{m}_i \mathbf{v}_i \; , \tag{34}$$

da cui segue che la (33) è soddisfatta se e solo se risulta soddisfatta la relazione

$$\ddot{m}(G - O) = \sum_1^N {}_i \ddot{m}_i (P_i - O) \; . \tag{35}$$

Pertanto, quando G coincide con G^*, condizione necessaria e sufficiente affinché la (31) si riduca alla (32), ovvero esprima il classico teorema del moto del baricentro dei sistemi a massa variabile, è che sia soddisfatta la relazione (35).

BIBLIOGRAFIA

[1] Levi civita T. - *Sul moto di un corpo di massa variabile.* Atti della R. Acc. Naz. dei Lincei, vol. VII (1982), pp. 329-333.
Aggiunta alla Nota sul moto di un corpo di massa variabile, Luogo citato, pp. 984-986.
Ancora sul moto di un corpo di massa variabile. Atti Acc. Naz. dei Lincei, vol. XII (1930), pp. 575-578.
Fermi E. - *Sul moto di un corpo di massa variabile.* Atti Acc. Naz. dei Lincei, vol. IX (1929), pp. 984-986.
Sommerfeld A. - *Lezioni di Fisica Teorica*, Ed. Sansone, Firenze (1957), vol. I, p. 30.
Kosmodem' yanskii A.A. - *A course in theoretical Mechanics,* Printed in Jerusalem by S. Monson (1963).
Graffi D. - *Una osservazione sull'equazione del moto di un corpo di massa variabile*, Atti Acc. Naz. Lincei, vol. XII, Fasc. 11 (1930).
Limitazioni dei valori di alcuni invarianti adiabatici con applicazione al problema delle masse variabili. Atti Acc. delle Scienze, Torino, vol. 68 (1933).
Sopra un caso speciale del problema dei due corpi di massa variabile. Boll. U.M.I. (1934).
Ancora sull'effetto di una variazione di massa su un'orbita planetaria. Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. Nat,. vol. XXI (1935), p. 438.
Applicazione della teoria sulle masse variabili alla cometa Encke. Rend. Sem. Science, Cagliari, vol. V (1935), fasc. 3/4.
Ulteriori ricerche sull'effetto di una variazione di massa su un'orbita planetaria. Rend. Sem. Scienze, Cagliari, vol. VI (1963), fasc. 2.
Sul problema dei due corpi di massa variabile. Ann. Univer. di Ferrara, vol. I, (1951), pp. 23-33.
Agostinelli C. - Atti Acc. delle Scienze, Torino (1937).

[2] Oliveri E. - *Sulla dinamica relativistica del punto con massa di quiete comunque variabile.* Atti I Congresso Nazionale Meccanica Teorica ed Applicata, International F. Mecc. Sc., Udine (1971).
Concetto di quadriforza e legge di trasformazione relativistica del calore. Atti II Congresso Nazionale Meccanica Teorica ed Applicata, International Centre f. Mecc. Sc., Napoli (1974).
Legge di Ott sulla trasformazione relativistica del calore. Ann. di Matematica Pura ed Appl., Tomo XI serie IV (1976).

La massa variabile nella Meccanica classica e nella Relatività ristretta. Atti Acc. Gioenia di Catania, Serie VII, vol. IX (1977).
Lezioni di Meccanica Razionale, Ed. Giannotta, Catania (1983), Parte II, Tomo I, pp. 27-35, Tomo II, pp. 213-224.

[3] OLIVERI E. - *Le equazioni cardinali nella dinamica dei sistemi a massa variabile.* Atti Acc. Gioenia di Catania, Serie VI, vol. XIV (1962).

Esistenza e nonunicità della soluzione statica per volte elastiche cilindriche in trazione

FRANCO PASTRONE
Istituto di Fisica Matematica «J.L. Lagrange»
Università di Torino

Riassunto. *Viene studiato un problema di statica di superficie elastiche cilindriche soggette ad un carico di trazione ai bordi, sia nel caso elastico che iperelastico, secondo la teoria nonlineare delle volte sottili. Si dimostra l'esistenza di soluzioni che, per un valore critico del carico, si biforcano dalla soluzione cosiddetta banale.*

1. Introduzione

Il problema dell'esistenza e nonunicità della soluzione delle equazioni di equilibrio per una volta di rivoluzione alla Cosserat, soggetta a deformazioni che conservino la simmetria assiale e a carichi al bordo, è stata esaurientemente analizzato da ANTMAN [1] nel caso iperelastico nonlineare.

Per quanto rigaurda il caso elastico nonlineare, COHEN e PASTRONE [2] hanno dimostrato l'esistenza di soluzioni biforcate nel caso di volte di rivoluzione, del tipo di Kirchhoff generalizzato, soggette al vincolo di inestendibilità del meridiano e a un carico di compressione ai bordi.

Usando lo stesso modello di volta, viene naturale domandarsi se risultati analoghi si possano trovare quando il meridiano sia estendibile ed il carico sia una trazione, a partire, come nel caso precedente, da configurazioni cilindriche.

Una analisi più estesa e dettagliata verrà fornita in [4], mentre in questa sede mi limiterò a richiamare i risultati essenziali e più interessanti, sia nel caso elastico che iperelastico, e cioè l'esistenza di stati di equilibrio deformati (*buckled states*), restando aperto il problema se siano possibili tra di essi configurazioni che presentino strozzature (*necking*).

2. Le equazioni di equilibrio

Sia B_Σ un continuo bidimensionale individuato da una porzione di superficie regolare di rotazione Σ attorno ad un asse di versore $\mathbf{k}$. Si assegni su Σ un sistema di coordinate (s, φ), dove s indica un'ascissa curvilinea lungo il meridiano di Σ e φ la longitudine, con $s \in [0, 1]$ e $\varphi \in [0, 2\pi[$. La superficie Σ resta individuata dal vettore posizione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, \varphi)$, la cui assegnazione determina la *configurazione* di B_Σ, mentre un *moto* è una famiglia ad un parametro di configurazioni. Come è consuetudine, una possibile configurazione di B_Σ viene scelta quale configurazione di *riferimento* Σ_0. In tal caso, come ascissa curvilinea s su Σ si assume la lunghezza d'arco del corrispondente meridiano su Σ_0 e si normalizza la lunghezza di tale meridiano, cioè si pone $l = 1$.

La generica configurazione di B_Σ è data da:

$$\mathbf{r} = r(s)\, \mathbf{e}_r(\varphi) + z(s)\mathbf{k}\,, \tag{2.1}$$

dove $r(s) \geqslant 0$, $\mathbf{e}_r$ è il versore ortogonale a $\mathbf{k}$ nel piano del meridiano individuato dalla longitudine φ (per comodità potremmo chiamare $\mathbf{k}$ e $\mathbf{e}_r$ i versori della *verticale* e dell'*orizzontale*, rispettivamente).

Come misure di deformazione conviene assumere, in accordo con [1], l'insieme $\epsilon = \{\sigma, \rho, \chi, \vartheta'\}$ definito da:

$$\sigma = 1 - \frac{r}{R}\,, \quad \rho = \sqrt{(r')^2 + (z')^2}\,, \quad \chi = \cos(\vartheta + \Theta) - \cos\vartheta\,, \tag{2.2}$$

essendo ϑ l'angolo che la tangente $\mathbf{t} = \mathbf{r}'/|r'|$ al meridiano forma con la verticale; con l'apice $'$ si indica derivazione rispetto ad s.

Secondo la notazione usuale, le lettere maiuscole $(R, \Theta, \ldots)$ indicano le corrispondenti grandezze $(r, \vartheta, \ldots)$ valutate nella configurazione di riferimento Σ_0. Valgono inoltre i seguenti legami:

$$r' = -\rho \sin\vartheta\,, \qquad z' = \rho\cos\vartheta\,, \tag{2.3}$$

che verranno utilizzati nel seguito.

Nell'ipotesi di assenza di forze distribuite, le equazioni di equilibrio di risultante e di momento si possono scrivere nella forma intrinseca:

$$(\mathbf{n}r)' + \mathbf{k} \times \mathbf{n}_\varphi = \mathbf{0}\,, \tag{2.4}$$

$$(\mathbf{m}r)' + \mathbf{k} \times \mathbf{m}_\varphi + \rho\, \mathbf{t} \times \mathbf{n}r = \mathbf{0}\,, \tag{2.5}$$

dove $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}_\varphi$ e $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}_\varphi$ sono, rispettivamente, i risultanti ed i momenti risultanti degli sforzi che agiscono sul bordo di una porzione di Σ delimitata da paralleli e meridiani: $\mathbf{n}$ e $\mathbf{m}$ agiscono su paralleli, $\mathbf{n}_\varphi$ e $\mathbf{m}_\varphi$ su meridiani. Nell'ipotesi di inestendibilità del meridiano, $\rho = 1$, si ritrovano le equazioni di equilibrio di [2].

Introdotti i versori $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{k} \times \mathbf{e}_r$ e $\boldsymbol{\nu}$, normale interna a Σ, si considerino le decomposizioni:

$$\mathbf{n} = n\mathbf{t} + q\boldsymbol{\nu} \quad , \quad m = -m\mathbf{e}_\varphi \quad , \quad \mathbf{n}_\varphi = n_\varphi \mathbf{e}_\varphi \quad , \quad \mathbf{m}_\varphi = m_\varphi \mathbf{t} \, . \tag{2.6}$$

Proiettando scalarmente la (2.4) lungo $\mathbf{t}$ e $\boldsymbol{\nu}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} &T' - Q\vartheta' + N \sin\vartheta = 0, \\ &Q' + T\vartheta' + N \cos\vartheta = 0 \, , \end{aligned} \tag{2.7}$$

mentre la (2.5) proiettata lungo $\mathbf{e}_\varphi$ dà:

$$M' + Q\rho + L \sin\vartheta = 0 \, . \tag{2.8}$$

In (2.7) e (2.8), per brevità, si è posto: $T = nr$, $Q = qr$, $N = n_\varphi$, $M = mr$, $L = m_\varphi$. Dal punto di vista fisico, n rappresenta lo sforzo assiale, q quello di scorrimento, n_φ uno sforzo di parallelo, m e m_φ momenti di flessione.

Se ora si considera la decomposizione di $\mathbf{n}$ lungo $\mathbf{k}$ e $\mathbf{e}_r$:

$$\mathbf{n} = -\nu\mathbf{k} + h\mathbf{e}_r \quad , \tag{2.9}$$

posto $\bar{\nu} = \nu r$ e $\bar{h} = hr$, le (2.7) possono venir sostituite dalle:

$$\bar{h}' = N \quad , \quad \bar{\nu}' = 0 \, . \tag{2.10}$$

Le (2.10) sono le componenti delle equazioni intrinseche di equilibrio lungo la verticale e l'orizzontale. Per completare lo schema, occorre assegnare le equazioni costitutive, che, nel nostro caso, saranno del tipo

$$M = \mathscr{M}(\epsilon) \, , \quad L = \mathscr{L}(\epsilon) \, , \quad T = \mathscr{T}(\epsilon) \, , \quad N = \mathscr{N}(\epsilon) \, . \tag{2.11}$$

La volta è supposto omogenea, pertanto nelle (2.11) non vi è dipendenza esplicita da s; il termine q si configura come una reazione vincolare, per il fatto che il versore normale alla superficie Σ resta tale durante la deformazione.

3. Il problema al contorno

Si vuole studiare il problema dell'equilibrio del continuo schematizzato nel paragrafo precedente quando i suoi bordi siano vincolati ad essere due circonferenze di raggio R_0 giacenti in piani ortogonali a **k**: una di esse (in corrispondenza a $s=0$) sia fissata, mentre l'altra (per $s=1$) sia libera di scorrere senza attrito lungo il cilindro di raggio R_0 e asse **k** sotto l'azione di una forza di trazione costante, per unità di lunghezza del bordo:

$$\mathbf{F} = F\mathbf{k} \quad , \quad F \geqslant 0 . \tag{3.1}$$

Inoltre i meridiani sono liberi di ruotare agli estremi, nel loro piano di appartenenza.

Dalle equazioni (2.10) si ricava subito:

$$\bar{\nu} = -\bar{F} \quad , \quad \text{con } \bar{F} = FR_0 . \tag{3.2}$$

Il sistema completo di equazioni di equilibrio con questo carico diviene:

$$\begin{aligned} &M' + L \sin\vartheta - \bar{F}\rho \sin\vartheta - \bar{h}\rho\cos\vartheta = 0 \ , \\ &T - \bar{F}\cos\vartheta + \bar{h}\sin\vartheta = 0 \ , \\ &\bar{h}' - N = 0 \ , \\ &r' + \rho\sin\vartheta = 0 \ . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Per ricavare le prime due equazioni occorre procedere, come in [2], per confronto tra (2.9) e $(2.6)_1$.

Le condizioni al contorno sono date da:

$$r(0) = r(1) = R_0 \ , \tag{3.4}$$

$$M(0) = M(1) = 0 \ . \tag{3.5}$$

Le equazioni costitutive sono ancora le (2.11), ma si richiede ad esse di soddisfare alcune restrizioni, peraltro fisicamente naturali:

i) $\dfrac{\partial \mathscr{M}}{\partial \vartheta'} > 0\,, \quad \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \chi} > 0\,, \quad \dfrac{\partial \mathscr{N}}{\partial \sigma} > 0\,, \quad \dfrac{\partial \mathscr{T}}{\partial \rho} > 0\,;$

ii) $\mathscr{M}$ dispari in ϑ' ;

iii) $\mathscr{L}$ e $\mathscr{N}$ pari in ϑ' ;

iv) $\mathscr{N}$ dispari in σ ;

v) $\mathscr{L}$ dispari in χ .

Le prime due restrizioni consentono di sostituire la condizione (3.5) con la:

$$\vartheta'(0) = \vartheta'(1) = 0. \tag{3.6}$$

Si verifica immediatamente che il problema al contorno (3.3), (3.4), (3.6), (2.11) (con le i), ... v)) ammette la soluzione

$$\sigma = 0\ ,\ \rho = \rho_0 = \text{cost},\ \chi = 0,\ \vartheta = 0, \qquad (\Rightarrow r = R_0\,,\ \vartheta' = 0), \tag{3.7}$$

se è soddisfatta l'equazione algebrica $T(0, \rho_0) = F(\rho_0)$ e se si assume come configurazione di riferimento il cilindro di raggio R_0 corrispondente al carico $F = 0$. Chiameremo tale soluzione la soluzione "banale" del nostro problema: si tratta di un cilindro di raggio R_0, il cui allungamento costante è dato da ρ_0. Essendo la configurazione di riferimento cilindrica, le caratteristiche di deformazione vengono ad essere ora:

$$\sigma = 1 - \frac{r}{R_0}\ , \qquad \chi = \cos\vartheta - 1\ , \tag{3.8}$$

poiché $R = R_0$ e $\Theta = 0$.

La teoria delle biforcazioni, nel caso di equazioni differenziali ordinarie (si veda al riguardo [3] e la bibliografia ivi indicata per alcune applicazioni alla teoria dell'elasticità; altre applicazioni si trovano in [2] e [5]), consente di provare l'esistenza di soluzioni distinte da quella banale (3.7). La dimostrazione per esteso viene fornita in [4]; qui mi limiterò a ricordare che si fa ricorso ad una tipica tecnica perturbativa, passando attraverso una linearizzazione del sistema (3.3).

A tale scopo si introduce un parametro perturbativo $a \in R$ e si considera la decomposizione, valida nell'intorno della configurazione banale (3.7):

$$\vartheta = a\,\eta(s, F, a) \quad , \quad r = R_0 + a\,\gamma(s, F, a) \ ,$$
$$\rho = \rho_0 + a\,\epsilon(s, F, a) \quad , \quad \bar{h} = a\,\delta(s, F, a) \ , \tag{3.9}$$

che permette di pervenire al sistema differenziale ordinario lineare a coefficienti costanti:

$$\begin{aligned} &\gamma^{(IV)} + \lambda\,\gamma'' + \mu\gamma = 0 \ , \\ &\gamma' + \rho_0\,\eta = 0 \ , \\ &\delta' - \mathcal{N}_r\,\gamma = 0 \ , \\ &\epsilon' = 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} &\gamma(0) = \gamma(1) = 0 \quad , \quad \gamma'(0) = \rho_0 \ , \\ &\eta'(0) = \eta'(1) = 0 \ , \quad \eta(0) = -1 \ , \\ &\delta(0) = b + 1 \ , \end{aligned} \tag{3.11}$$

dove si è posto:

$$\begin{aligned} &\lambda = (\mathcal{L}_t - \bar{F}\rho_0)/\mathcal{M}_{\vartheta'} \quad , \quad \mu = \rho_0^2\,(\mathcal{N}_r/\mathcal{M}_{\vartheta'}) \ , \\ &\mathcal{L}_t = \mathcal{L}(0,0,0,\rho_0) \ , \ \mathcal{M}_{\vartheta'} = \left.\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \vartheta'}\right|_{(0,0,0,\rho_0)} \ , \\ &\mathcal{N}_r = \left.\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial r}\right|_{(0,0,0,\rho_0)} \ . \end{aligned} \tag{3.12}$$

E' sufficiente risolvere la $(3.10)_1$ per poi determinare facilmente le rimanenti funzioni incognite; si noti che in ogni caso è $\epsilon = \text{cost}$. La $(3.10)_1$, con le condizioni al contorno $(3.11)_1$, ammette le soluzioni:

$$\gamma(s; 0, 0, \rho_0; \bar{F}_n^c) = \rho_0\,\frac{\sin(n\pi s)}{n\pi} \ , \tag{3.13}$$

(3.14) $\gamma = 0$, cui corrisponde la soluzione banale (3.7), se $F \neq F_n^c$,

essendo $\bar{F}_n^c$ il valore critico del parametro $\bar{F}$ dato da:

$$\bar{F}_n^c = \frac{\mathscr{L}t}{\rho_0} - \frac{\mathscr{M}_{\vartheta'}\, n^2 \pi^2}{\rho_0} - \frac{\mathscr{N} r}{n^2 \pi^2}\, \rho_0^2 \quad ; \tag{3.15}$$

l'effettivo carico critico è allora:

$$F_n^c = 1/R_0\, \bar{F}_n^c \ . \tag{3.16}$$

Nel paragrafo seguente si farà uso della soluzione (3.13), mentre per l'ulteriore sviluppo della teoria di Poincarè si rinvia alla bibliografia citata.

4. Il caso iperelastico

Una risposta immediata alla domanda se esistano altre soluzioni distinte da quella banale si ha per materiali iperelastici, quando cioè esista una densità di energia di deformazione $W = W(\epsilon)$ per cui valgano le relazioni:

$$\mathscr{M} = R_0 \frac{\partial W}{\partial \vartheta'}, \quad \mathscr{L} = R_0 \frac{\partial W}{\partial \chi}, \quad \mathscr{N} = R_0 \frac{\partial W}{\partial r}, \quad \mathscr{T} = R_0 \frac{\partial W}{\partial \rho} \ . \tag{4.1}$$

In tal caso si può far ricorso al criterio dell'energia. Le equazioni di equilibrio si deducono rendendo stazionario il funzionale:

$$E = \int_0^1 \Big[W(\sigma, \rho, \chi, \vartheta') + F(1 - \rho \cos \vartheta) + \mu \left(\sigma' + \frac{\rho}{R_0} \sin \vartheta \right) \Big] ds \ , \tag{4.2}$$

dove μ compare come moltiplicatore di Lagrange. Il funzionale E esprime l'energia totale interna del continuo, a meno del fattore costante $2\pi R_0$.

Le equazioni di equilibrio (3.3), insieme con delle condizioni al contorno "naturali", non sono altro che le equazioni di Eulero-Lagrange del funzionale (4.2), tenuto conto delle identificazioni (4.1). Per un esame più dettagliato del problema variazionale per volte di rivoluzione si veda [1] e, in un caso analogo a quello qui trattato, [2].

Si può ora enunciare il seguente teorema di nonunicità (globale) della soluzione del nostro problema a valori al contorno:

Teorema: se la densità di energia di deformazione è strettamente convessa in ϑ' e σ e valgono opportune condizioni di regolarità, per $\bar{F} \geqslant \bar{F}_n^c$ esiste una soluzione classica non banale del problema al contorno dato; tale soluzione è un minimo assoluto del funzionale E in (4.2).

Dimostrazione: nelle ipotesi fatte, il problema variazionale assegnato ammette un minimo assoluto (regolare). Una soluzione del problema è già a disposizione, ed è la soluzione banale; se questa soluzione non rende minimo il funzione (4.2), allora esiste un'altra soluzione, quella che minimizza tale funzionale. Una condizione necessaria affinché una soluzione renda minimo il funzionale E è che la variazione seconda del funzionale stesso sia definita positiva nell'intorno di tale soluzione. Per le ipotesi costitutive fatte, avendo inoltre assunto come variazioni prime le soluzioni (3.13) del problema linearizzato (3.10):

$$\delta\sigma = \frac{\rho_0 \sin(n\pi s)}{R_0\, n\pi} \quad , \qquad \delta\vartheta = -\cos(n\pi s) \quad ,$$

la variazione seconda di E assume la forma:

$$(4.3) \qquad \delta^2 E = \int_0^1 \left[\frac{W_{\sigma\sigma}\, \rho_0^2 \sin^2(n\pi s)}{R_0^2\, n^2\, \pi^2} - W_\chi \cos^2(n\pi s) + \right. \\ \left. + W_{\vartheta'\vartheta'}\, n^2\pi^2 \sin^2(n\pi s) + \bar{F}\rho_0 \cos(n\pi s) \right] ds \ ,$$

dove con $W_{\sigma\sigma}$, W_χ, $W_{\vartheta'\vartheta'}$ si devono intendere le derivate di W rispetto alle corrispondenti variabili, valutate nella configurazione di riferimento.

Ne segue immediatamente:

$$(4.4) \qquad \delta^2 E = 1/2 \left[\frac{W_{\sigma\sigma}\, \rho_0^2}{R^2\, n^2\, \pi^2} - W_\chi + n^2\pi^2\, W_{\vartheta'\vartheta'} + \bar{F}\rho_0 \right] ,$$

da cui si riconosce che il valore di $F = 1/R_0 \bar{F}$ che rende nulla la variazione seconda (4.4) è proprio, con le identificazioni (4.1), il carico critico F_n^c dato dalla (3.16) e quindi se $F \geqslant F_n^c$ la variazione seconda diventa negativa; resta così dimostrato il teorema.

In termini di meccanica strutturale potremo dire che per $F > F_n^c$ esiste una soluzione deformata, rispetto a quella banale, (*buckled state*) e tale configurazione è stabile, nel senso che minimizza l'energia del sistema, mentre, finché $F < F_n^c$, è da considerarsi stabile la configurazione banale, cioè quella cilindrica.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANTMAN S.S. - *Existence and nonuniqueness of axisymmetric equilibrium states of nonlinearly elastic shells,* A.R.M.A., v. 40, n. 1 (1971).

[2] COHEN H., PASTRONE F. - *Axisymmetric equilibrium states of nonlinear elastic cylindrical shells,* Intl. J. Nonlin. Mech., v. 21, No. 1 (1986)

[3] KELLER J.B. - *Bifurcation theory for ordinary differential equations,* in «Bifurcation theory and nonlinear eigenvalue problems (J.B. Keller & S.S. Antman, ed.) Benjamin, N. York (1969).

[4] PASTRONE F., TONON M.L. - *Nonuniqueness of equilibrium states for axisymmetric elastic shells in tension,* (to appear on J. El.).

[5] PODIO GUIDUGLI P. - *Flexural instabilities of elastic rods*, J. Elast., v. 12, n. 1 (1982).

Sulle equazioni variazionali riguardanti il problema del moto di un corpo di massa variabile e struttura quasi-giroscopica, libero nello spazio

ANTONIO PIGNEDOLI
Dipartimento di Matematica - Università di Bologna

Summary. *One exposes some results of research of the author concerning the rotational movements of a rigid body with variable mass and quasi-gyroscopic structure, free in space.*

1. - Un caso di notevole intresse della teoria del moto di un corpo libero nello spazio è quello rappresentato dal problema del movimento di un sistema rotante di massa $m(t)$, funzione assegnata del tempo t e per il quale si faccia l'ipotesi semplificatrice della rigidità, quindi della applicabilità di equazioni differenziali di tipo euleriano [1]. Indicando, al solito, con $\mathbf{K}$ il vettore momento della quantità di moto, con $\boldsymbol{\omega}$ il vettore velocità angolare di rotazione e con riferimento ad una terna di assi cartesiani solidali x, y, z, con l'origine nel baricentro del sistema (pensato, in approssimazione, come invariabile), l'equazione differenziale vettoriale del moto del sistema intorno al baricentro stesso è la seguente:

$$(1) \qquad \frac{d\mathbf{K}}{dt} + \omega \wedge \mathbf{K} + \mathbf{T} = \mathbf{M} \ ,$$

dove $\mathbf{M}$ è il momento risultante delle forze esterne e $\mathbf{T}$ è il vettore che rappresenta la variazione rispetto al tempo del momento della quantità di moto trasferita dal sistema ai getti emittenti massa. A questo proposito, penseremo il sistema come dotato di N ugelli collocati simmetricamente rispetto all'asse z, ad una estremità del veicolo (di forme allungata); col centro di ognuno dei citati ugelli definito da un vettore di posi-

zione:

$$\mathbf{r}_s = x_s \, \mathbf{i} + y_s \, \mathbf{j} - l \, \mathbf{k} \quad , \qquad (s = 1, 2, \ldots, N) \, , \tag{2}$$

dove l è la distanza del baricentro del veicolo dal piano delle uscite dei getti ed $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ sono, al solito, i versori degli assi x, y, z. Faremo inoltre l'ipotesi della struttura giroscopica del mobile (uguaglianza dei momenti d'inerzia $A(t)$ e $B(t)$), per cui avremo, col solito significato dei simboli:

$$\omega = \omega(t) = p(t) \, \mathbf{i} + q(t) \, \mathbf{j} + r(t) \, \mathbf{k} \quad , \tag{3}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(t) = A(t) \, [p(t) \mathbf{i} + q(t) \mathbf{j}\,] + C(t) \, r(t) \, \mathbf{k} \quad , \tag{4}$$

ed inoltre:

$$A(t) = B(t) = m(t) \, \rho_x^2(t) \quad , \quad C(t) = m(t) \, \rho_z^2(t) \, , \tag{5}$$

$$\dot{A}(t) = \dot{B}(t) = \dot{m}(t) \, \rho_x^2(t) + m(t) \, \frac{d \rho_x^2(t)}{dt} \quad , \tag{6}$$

$$\dot{C}(t) = \dot{m}(t) \, \rho_z^2(t) + m(t) \, \frac{d \rho_z^2(t)}{dt} \quad , \tag{7}$$

dove $\rho_x(t) = \rho_y(t)$ e $\rho_z(t)$ sono i raggi d'inerzia del sistema relativi agli assi solidali citati. Si ottengono allora, per i moti intorno al baricentro del sistema considerato, le seguenti equazioni differenziali euleriane "corrette":

$$\left\{ \begin{aligned} & A(t)\dot{p}(t) + [C(t) - A(t)] \, q(t) r(t) - f(t) p(t) = \\ & \qquad = M_x \, (\theta, \varphi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, t), \\ & A(t)\dot{q}(t) + [A(t) - C(t)] \, r(t) p(t) - f(t) \, q(t) = \\ & \qquad = M_y \, (\theta, \varphi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, t) \, , \\ & C(t)\dot{r}(t) - g(t) r(t) = M_z \, (\theta, \varphi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, t) \end{aligned} \right. \tag{8}$$

dove le $A(t)$ e $C(t)$ sono funzioni note del tempo t, le M_x, M_y, M_z sono

funzioni assegnate degli angoli di Eulero, delle loro derivate rispetto al tempo e del tempo medesimo e dove anche $f(t)$ e $g(t)$ sono funzioni note del tempo, essendo assegnate le leggi di variazione nel tempo della massa e dei momenti d'inerzia. Si ha, precisamente:

$$f(t)=\dot{m}\left(l^2+\frac{1}{2}\lambda^2-\rho_x^2\right)-m\frac{d\rho_x^2}{dt}\ , \tag{9}$$

$$g(t)=\dot{m}\,(\lambda^2-\rho_x^2)-m\frac{d\rho_z^2}{dt}\ ,$$

$$\lambda^2=(\sum_{s=1}^{N}\dot{m}_s r_s^2)/\dot{m}\ ,\quad \dot{m}_s=\frac{dm_s}{dt}<0\ ,\quad \dot{m}=\frac{dm}{dt}<0\ , \tag{10}$$

essendo $m_s(t)$ la massa dell's-esimo getto.

A questo punto va tenuto presente quanto segue. Le funzioni, reali della variabile reale t, $f(t)$ e $g(t)$, definite per ogni $t \geqslant 0$ saranno limitate dovunque ed, in generale, diverse da zero nell'intervallo $0 — t_c$ ed uguali a zero per $t \geqslant t_c$, poiché per $t = t_c$ cessa il fenomeno di emissione di massa e si avrà l'annullarsi della derivata della massa e di quelle dei quadrati ρ_x^2 e ρ_y^2 dei raggi d'inerzia per $t > t_c$. Dunque $f(t)$ e $g(t)$ saranno pensate come funzioni reali di variabile reale limitate e generalmente continue su tutto il semiasse reale $t \geqslant 0$, con una sola, eventuale, discontinuità limitata nel punto $t = t_c$. (È su tale discontinuità va fatta la seguente osservazione: il fenomeno di emissione di massa non cesserà istantaneamente ma si estinguerà in un sia pur breve Δt, dando luogo così ad un raccordo con continuità). Noi considereremo il moto in un intervallo temporale convenientemente lungo, ma finito, $0 — t$. Facendo l'ipotesi che i momenti sollecitanti M_x, M_y ed M_z non dipendano dagli angoli di Eulero né dalle loro derivate ma soltanto dal tempo o siano, in prima approssimazione, costanti, si ha quanto segue: la terza delle equazioni differenziali euleriane "corrette" (8) fornisce subito, mediante quadrature, la terza componente $r(t)$ della velocità angolare di rotazione come funzione $R(t, r_0)$ del tempo e del valore iniziale. Introducendo poi la "velocità angolare complessa" $\omega_{12}(t)=p(t)+iq(t)$, $(i^2=-1)$ e risolvendo l'equazione differenziale cui essa risulta soddisfare ed, infine, separando la parte reale da quella immaginaria, si hanno, per mezzo di quadrature, anche le prime due componenti della velocità angolare di rotazione $p(t)$ e $q(t)$. Le tre componenti della velocità sopra detta risultano funzioni limitate del tempo

2. - Consideriamo ora, con le stesse ipotesi sui momenti sollecitanti, il caso della quasi-giroscopicità del sistema in moto. Avremo cioè

$$A(t)-B(t)=\epsilon A(t) \quad , \quad B(t)=(1-\epsilon)A(t) \tag{11}$$

con ϵ quantità piccola, del primo ordine. I moti del sistema considerato intorno al baricentro saranno retti dalle equazioni di tipo euleriano:

$$\begin{cases} A(t)\dot{p}(t)+[C(t)-(1-\epsilon)A(t)]\,q(t)r(t)-f(t)p(t)=M_x(t), \\ (1-\epsilon)A(t)\dot{q}(t)+[A(t)-C(t)]\,r(t)p(t)-f_1(t)q(t)=M_y(t), \\ C(t)\dot{r}(t)-\epsilon A(t)p(t)q(t)-g(t)r(t)=M_z(t)\,, \end{cases} \tag{12}$$

dove è $f_1(t)=f(t)+\epsilon\rho^*(t)$; $\rho^*(t)=m\rho_x^2+m\dfrac{d\rho_x^2}{dt}$.

Cercheremo di soddisfare alle equazioni differenziali sopra scritte mediante soluzioni della forma:

$$p(t)=\overline{p}(t)+\xi(t) \quad , \quad \overline{q}(t)=\overline{q}(t)+\eta(t) \quad , \quad \overline{r}(t)=\overline{r}(t)+\zeta(t) \tag{13}$$

dove $\overline{p}(t), \overline{q}(t), \overline{r}(t)$ indicano ora le soluzioni delle equazioni euleriane per il caso a struttura giroscopica precedentemente considerato e le $\xi(t)$, $\eta(t)$ e $\zeta(t)$ sono "variazioni" nel senso di Poincaré.

Sostituendo nelle (12) e semplificando, si ottengono, per le funzioni $\xi(t)$, $\eta(t)$ e $\zeta(t)$, le seguenti equazioni variazionali:

$$\begin{cases} A(t)\dot{\xi}(t)+[C(t)-A(t)]\,[\overline{q}(t)\zeta(t)+\overline{r}(t)\eta(t)]+ \\ \qquad +\epsilon A(t)\overline{q}(t)\overline{r}(t)-f(t)\,\xi(t)=0 \\ A(t)\dot{\eta}(t)+[A(t)-C(t)]\,[\overline{r}(t)\,\xi(t)+\overline{p}(t)\,\zeta(t)]- \\ \qquad -\epsilon A(t)\dot{\overline{q}}(t)-\epsilon\rho^*(t)\overline{q}(t)-f(t)\,\eta(t)=0 \\ C(t)\dot{\zeta}(t)=g(t)\zeta(t)+\epsilon A(t)\overline{p}(t)\overline{q}(t)\ . \end{cases} \tag{14}$$

La terza delle (14) fornisce:

$$\zeta(t,\zeta_0)=P(t)\,[\epsilon Q(t)+\zeta_0] \quad , \quad (\zeta_0=\zeta_{t=0}) \tag{15}$$

con

$$P(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{g(t)}{C(t)}\, dt\right), \tag{16}$$

$$Q(t) = \int_0^t \frac{A(t)\,\bar{p}(t)\,\bar{q}(t)}{C(t)\,P(t)}\, dt .$$

Nella ipotesi, fisicamente plausibile, che, preso ad arbitrio un $\delta > 0$, sia $|\zeta_0| < \delta$, si vede che la variazione $\zeta(t)$ si mantiene effettivamente "piccola" per ogni t dell'intervallo considerato $0 - t$, interessante il moto. Infatti si ha:

$$|\zeta(t)| \leqslant \epsilon P(t)\, |Q(t)| + P(t)\, |\zeta_0| , \tag{17}$$

e le funzioni $P(t)$ e $Q(t)$ che vi appaiono sono ivi limitate. Sostituendo poi il valore trovato di $\zeta(t)$ nelle prime due equazioni variazionali (14), si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) + \dfrac{C(t) - A(t)}{A(t)}\, \bar{r}(t)\,\eta(t) + U(t) - W(t)\,\xi(t) = 0 \\[2ex] \dot{\eta}(t) - \dfrac{C(t) - A(t)}{A(t)}\, \bar{r}(t)\,\xi(t) + V(t) - W(t)\,\eta(t) = 0 , \end{cases} \tag{18}$$

dove si è posto:

$$\begin{cases} U(t) = \dfrac{C(t) - A(t)}{A(t)}\, \bar{q}(t)\,\zeta(t, \zeta_0) + \epsilon\,\bar{q}(t)\,\bar{r}(t) , \\[2ex] V(t) = \dfrac{A(t) - C(t)}{A(t)}\, \bar{p}(t)\,\zeta(t, \zeta_0) - \epsilon\,\dot{\bar{q}}(t) - \dfrac{\epsilon\,\rho^*(t)\,\bar{q}(t)}{A(t)} , \\[2ex] W(t) = f(t)/A(t) . \end{cases} \tag{19}$$

La funzione $W(t)$ è limitata e le funzioni $U(t)$ e $V(t)$ sono "piccole"

in tutto l'intervallo temporale considerato. Invero si ha:

$$|U(t)| \leqslant \frac{C(t)-A(t)}{A(t)} \bar{q}(t) \quad |\xi(t, \zeta_0)| + \epsilon |\bar{q}(t)\, \bar{r}(t)| \quad , \tag{20}$$

$$|V(t)| \leqslant \frac{C(t)-A(t)}{A(t)} \bar{p}(t) \quad |\xi(t, \zeta_0)| + \epsilon |\dot{\bar{q}}(t)| + \\ + \epsilon \left| \frac{\rho_x^2(t)\, \bar{q}(t)}{A(t)} \right| \quad . \tag{21}$$

Moltiplicando la seconda delle equazioni (18) per $i = \sqrt{-1}$ e sommando con la prima, dopo avere posto $\chi_{12}(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, si ottiene, per la "variazione complessa" $\chi_{12}(t)$ così introdotta, la seguente equazione differenziale:

$$\dot{\chi}_{12}(t) = \left[\frac{i(C(t)-A(t))\, \bar{r}(t)}{A(t)} + W(t) \right] \chi_{12}(t) - \\ - [U(t) + i\,V(t)] \quad . \tag{22}$$

Poniamo ora:

$$W_1(t) = \int_0^t W(t)\, dt \quad , \quad S(t) = \int_0^t \frac{C(t)-A(t)}{A(t)} \bar{r}(t)\, dt \quad , \tag{23}$$

dove le funzioni $W_1(t)$ ed $S(t)$ sono limitate per ogni t dell'intervallo temporale considerato. Poniamo inoltre:

$$Z_1(t) = \int_0^t e^{-W_1(t)}\, U(t) \cos S(t)\, dt \quad , \tag{24}$$

$$Z_2(t) = \int_0^t e^{-W_1(t)}\, V(t) \sin S(t)\, dt \quad , \tag{25}$$

$$Z_3(t) = \int_0^t e^{-W_1(t)}\, U(t) \sin S(t)\, dt \ , \tag{26}$$

$$Z_4(t) = \int_0^t e^{-W_1(t)}\, V(t) \cos S(t)\, dt \ . \tag{27}$$

L'equazione differenziale (22) fornisce la soluzione:

$$\begin{aligned} \chi_{12}(t) = {} & e^{W_1(t)} \left[\cos S(t) + i \sin S(t)\right] \cdot \\ & \cdot \left\{ \int_0^t -\left[U(t) + i\, V(t)\right] e^{-W_1(t)} \left[\cos S(t) - i \sin S(t)\right] dt \, + \right. \\ & \left. + \, \chi_{12}(0) \right\} . \end{aligned} \tag{28}$$

Separando la parte reale dalla parte immaginaria e riunendo i risultati, si ottengono, per le variazioni $\xi(t)$, $\eta(t)$ e $\zeta(t)$, le espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} \xi = \xi(t, \xi_0, \eta_0) = {} & -e^{W_1(t)} \cos S(t) \left[Z_1(t) + Z_2(t)\right] - \\ & - e^{W_1(t)} \sin S(t) \left[Z_3(t) - Z_4(t)\right] + \xi_0\, e^{W_1(t)} \cos S(t) - \\ & - \eta_0\, e^{W_1(t)} \sin S(t) \ , \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \eta = \eta(t, \xi_0, \eta_0) = {} & e^{W_1(t)} \cos S(t) \left[Z_3(t) - Z_4(t)\right] - \\ & - e^{W_1(t)} \sin S(t) \left[Z_1(t) + Z_2(t)\right] + \xi_0\, e^{W_1(t)} \sin S(t) + \\ & + \eta_0\, e^{W_1(t)} \cos S(t) \ , \end{aligned} \tag{30}$$

$$\zeta = \zeta(t, \xi_0, \eta_0) = P(t) \left[\epsilon\, Q(t) + \zeta_0\right] . \tag{31}$$

Con questo le equazioni variazionali relative al problema meccanico considerato sono risolte a meno di quadrature. In virtù di quanto è stato stabilito precedentemente sulle funzioni che intervengono nelle espres-

sioni delle variazioni ξ, η, ζ, risulta quanto segue: nelle ammesse ipotesi che tali funzioni siano "piccole" per $t=0$, esse si mantengono "piccole" durante tutto il moto considerato.

Dunque le componenti p, q ed r della velocità angolare di rotazione del sistema a struttura quasi-giroscopica si mantengono "prossime", durante tutto il moto, a quelle $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ proprie del corrispondente sistema a struttura giroscopica.

BIBLIOGRAFIA

[1] ELLIS J.W., MC ARTHUR - *Applicability of Euler's dynamical Equations to Rocket Motion,* A.R.S. Journal, nov. 1959.

[2] JARMOLOW K. - *Dynamics of a spinning Rocket with varying Inertia and applied Moment,* J. Appl. Phys., 28, 1957.

[3] PIGNEDOLI A. - *Razzi e satelliti artificiali,* Zanichelli, Bologna, 1963 (conf. Sem. Mat. Bari).

Lavoro svolto nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Un esempio di ottimizzazione del problema bifase unidimensionale piano inverso di quello di Stefan

DEMORE QUILGHINI
Istituto di Matematica Applicata «G. Sansone»
Facoltà di Ingegneria
Via Santa Marta 3 - 50139 Firenze

Summary. *An example of research of minimum in order to an inverse Stefan's problem is studies with the hypothesis that the critical temperature is constant and the initial temperature in the slab is a linear function of the position. This condition implies that the inverse problem is a two-phases problem and so it is indefinite. Another condition is needed in order to have a definite problem.*

1. Introduzione e posizione del problema

Sia S un sistema materiale piano di spessore materiale μ_0 ([3] (*), §§ 1 e 2, cfr. ivi anche per le costanti positive k_α, ρ_α, c_α, k_β, ρ_β, c_β ed L) inizialmente in una fase ben definita, ad esempio nella fase "calda" β, in uno stato termico stazionario alla temperatura $v(\mu, 0) = \dfrac{hu}{c_\beta}$, $0 < \mu < \mu_0$, dove $h \geqslant 0$ è un parametro indipendente da μ e dal tempo t.

Il problema che si propone è quello di realizzare il totale cambiamento di fase di S, dalla fase "calda" β alla fase "fredda" α, partendo dal piano $\mu = 0$, con velocità di trasformazione $c = \dfrac{\mu_0}{t_0} = \text{cost} > 0$, nel tempo assegnato t_0, determinando il parametro $h \geqslant 0$ in guisa da minimizzare lo scarto quadratico medio:

$$q^2 = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \frac{1}{ct} \int_0^{ct} (V(\mu, t) - V_s(\mu, t))^2 \, d\mu + \frac{1}{\mu_0 - ct} \int_{ct}^{\mu_0} (V(\mu, t) - V_s(\mu, t))^2 \, d\mu) \, dt \tag{1.1}$$

(*) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta al termine del lavoro.

tra lo stato termico

$$(1.2) \qquad V(\mu, t) = \begin{cases} c_\alpha \, v(\mu, t) & \in D_\alpha \equiv \{(\mu, t) : 0 < \mu < ct, \ 0 < t < t_0\} \,, \\ c_\beta \, v(\mu, t) & \in D_\beta \equiv \{(\mu, t) : ct < \mu < \mu_0, \ 0 < t < t_0\} \,, \end{cases}$$

con il quale si realizza il cambiamento di fase, essendo $v(\mu, t)$ la temperatura in S, e lo stato termico

$$(1.3) \qquad V_s(\mu, t) = \begin{cases} V(0, t) \dfrac{ct - \mu}{ct} & \in D_\alpha \,, \\ V(\mu_0, t) \dfrac{ct - \mu}{ct - \mu_0} & \in D_\beta \,, \end{cases}$$

che si avrebbe se fosse possibile realizzare il cambiamento di fase con una successione di stati termici stazionari, vale a dire come se in ogni istante $t \in (0, t_0)$ la temperatura in $S_\alpha, (0 < \mu < ct)$ e in $S_\beta, (ct < \mu < < \mu_0)$, fosse una funzione lineare di μ definita dagli stati termici superficiali $V(0, t)$ e $V(\mu_0, t)$, a priori incogniti essendo incognite $V(\mu, t)$ in S, e dallo stato termico $V(ct, t) = c_\alpha \, v(ct, t) = c_\beta \, v(ct, t) = 0$ al quale avviene il cambiamento di fase.

Questo problema, pur molto semplificato per la particolare geometria di S e la costanza delle caratteristiche termico-materiali in S_α ed in S_β, mette in evidenza alcune peculiarità del modello matematico e perciò ha interesse teorico nella tecnologia della colata dei metalli puri, ad esempio il Cu, dove la velocità di solidificazione viene mantenuta costante per realizzare lingotti con caratteristiche sufficientemente omogenee. Poiché la temperatura critica alla quale si realizza la solidificazione è funzione della velocità di solidificazione, ad esempio per il Cu cfr. [1], 15.3, pp. 575 e sg.ti, nella nostra posizione, a meno di una traslazione della scala termica, possiamo assumere, come è stato fatto, $v(ct, t) = 0$

Indichiamo con $C_L^{2,1}$ (cfr. [4]) la classe delle funzioni di μ e di t continue ed uniformemente limitate nel loro dominio di definizione , derivabili almeno due volte rispetto a μ ed una volta rispetto a t, con derivate continue, quindi limitate in ogni chiuso $C \subset D$. Con la posizione fatta per $v(ct, t)$ e posto

$$L_D = D \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} - \frac{\partial}{\partial t} \quad ,$$

$$D = \frac{k\rho}{c} \quad \left(D_\alpha = \frac{k_\alpha \rho_\alpha}{c_\alpha} \quad , \quad D_\beta = \frac{k_\beta \rho_\beta}{c_\beta} \right) \quad ,$$

lo stato termico $V(\mu, t) \in C_L^{2,1}$ separatamente in D_α e in D_β, per il quale avviene il cambiamento di fase assegnato deve soddisfare (cfr. [3], § 2, ed anche [4], n. 1) il sistema di equazioni:

(1.4) $$L_{D_\alpha} V(\mu, t) = 0 \in D_\alpha \quad ,$$

(1.5) $$L_{D_\beta} V(\mu, t) = 0 \in D_\beta \quad ,$$

(1.6) $$D_\alpha \lim_{\mu \to ct-} \frac{\partial V}{\partial \mu} - D_\beta \lim_{\mu \to ct+} \frac{\partial V}{\partial \mu} = Lc \quad ,$$

$$0 < t < t_0 \; , \; (Lc = \text{cost} > 0) \; ,$$

(1.7) $$V(ct, t) = 0 \quad , \quad 0 < t < t_0 \quad ,$$

(1.8) $$V(\mu, 0) = h\mu \quad , \quad 0 < \mu < \mu_0 \quad .$$

Come è stato dimostrato in [4], cfr. n. 1 e teorema 3, il sistema (1.4)-(1.8) è insufficiente a determinare lo stato termico $V(\mu, t)$ in S, come risulterà chiaro anche al n. 2 di questa nota, perché il cambiamento di fase con velocità assegnata può essere realizzato con diverse distribuzioni della temperatura in S, essendo indeterminata la ripartizione del calore latente Lc tra S_α ed S_β. E' perciò necessaria una ulteriore condizione, dettata da considerazioni di carattere fisico, atta a rendere determinato il modello matematico, in particolare il problema di valutare

(1.9) $$V(0,t) = \lim_{\mu \to 0} V(\mu, t) \; , \; V(\mu_0, t) = \lim_{\mu \to \mu_0} V(\mu, t) \; , \; 0 < t < t_0 \; .$$

Avendo supposto che inizialmente S si trovi in uno stato termico stazionario, $V(\mu, 0) = h\mu$, $0 < \mu < \mu_0$, possiamo immaginare di completare S per $\mu_0 \leqslant \mu$ con un semispazio di caratteristiche termico-materiali k_β, ρ_β e c_β allo stato termico iniziale $h\mu_0$, raccordato con quello di S dalla parte della fase β. Questa ipotesi, sufficiente a rendere determinato il

problema analitico, corrisponde, a parte le semplificazioni geometrico-materiali già dette, alla situazione nella quale si realizza la colata semi-continua del Cu. Con questa condizione aggiunta la (1.5) e la (1.8) sono sostituite da

$$(1.5)_1 \qquad L_{D_\beta} V(\mu, t)=0 \quad , \quad ct<\mu \, , \quad 0<t<t_0 \quad ,$$

$$(1.8)_1 \qquad V(\mu, 0)=\begin{cases} h\mu \, , & 0<\mu<\mu_0 \quad , \\ h\mu_0 \, , & \mu_0 \leqslant \mu \end{cases}$$

2. Determinazione dello stato termico in S

La $(1.5)_1$, la (1.7) e la $(1.8)_1$, e perciò anche la (1.5) e la (1.8), sono verificate nella classe $C_L^{2,1}$ da

$$(2.1) \qquad V(\mu, t)=\Gamma(\mu, t)\, W(\mu, t) \quad , \quad ct<\mu \quad , \quad 0<t<t_0 \quad ,$$

dove

$$(2.2) \qquad \Gamma(\mu, t)=\Gamma_0 \exp\left(\frac{c^2 t-2c\mu}{4D_\beta}\right) \quad , \quad \Gamma_0=\cos t \neq 0 \quad ,$$

$$(2.3) \qquad W(\mu, t)=\frac{1}{2\Gamma_0\sqrt{\pi D_\beta t}} \int_0^\infty F(\eta)$$

$$\left(\exp\left(-\frac{(\mu-ct-\eta)^2}{4D_\beta t}\right)-\exp\left(-\frac{(\mu-ct+\eta)^2}{4D_\beta t}\right)\right) d\eta \quad ,$$

essendo

$$(2.4) \qquad F(\eta)=\begin{cases} h\eta \exp\left(\dfrac{c\eta}{2D_\beta}\right) & , 0<\eta<\mu_0 \quad , \\ h\mu_0 \exp\left(\dfrac{c\eta}{2D_\beta}\right) & , \mu_0 \leqslant \eta \quad . \end{cases}$$

Infatti $\Gamma(\mu, t)$ soddisfa contemporaneamente le due equazioni

$$D_\beta \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \mu^2} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \quad , \quad 2\, D_\beta \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} + c\, \Gamma = 0 \quad ,$$

mentre $W(\mu, t)$ soddisfa l'equazione

$$D_\beta \frac{\partial^2 W}{\partial \mu^2} = c \frac{\partial W}{\partial \mu} + \frac{\partial W}{\partial t} \quad .$$

Si ha perciò

$$D_\beta \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \mu^2} W + 2\, D_\beta \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \frac{\partial W}{\partial \mu} + D_\beta \Gamma \frac{\partial W}{\partial \mu^2} + c\, \Gamma \frac{\partial W}{\partial \mu} =$$

$$= \frac{\partial \Gamma}{\partial t} W + \Gamma \frac{\partial W}{\partial t} + c\, \Gamma \frac{\partial W}{\partial \mu} \quad ,$$

da questa, ricordando la (2.1), segue la $(1.5)_1$; la (1.7) è immediata essendo $W(ct, t) = 0$. Si ha poi, [2], 2.4, pp. 58-59, $\lim_{t \to 0} W(\mu, t) = F(\mu)$, mentre è $\Gamma(\mu, 0) = \Gamma_0 \exp\left(-\frac{c\mu}{2D_\beta}\right)$, perciò dalla (2.1) segue la $(1.8)_1$. L'unicità per il problema $(1.5)_1$, (1.7), $(1.8)_1$ segue dall'unicità della soluzione del problema del calore.

Determinato così lo stato termico $V(\mu, t)$ in S_β è possibile valutare $D_\beta \lim_{\mu \to ct+} \frac{\partial V(\mu, t)}{\partial \mu}$ e quindi, per la (1.6) $D_\alpha \lim_{\mu \to ct-} \frac{\partial V(\mu, t)}{\partial \mu}$.
Poiché $W(ct, t) = 0$, dalla (2.1) si ha:

$$\lim_{\mu \to ct+} \frac{V(\mu, t)}{\partial \mu} = \Gamma(ct, t) \lim_{\mu \to ct+} \frac{\partial W(\mu, t)}{\partial \mu} \quad . \tag{2.5}$$

Dalla (2.3), derivando e passando al limite, segue

$$\lim_{\mu \to ct+} \frac{\partial W(\mu, t)}{\partial \mu} = \frac{1}{\Gamma_0 \sqrt{\pi D_\beta t}} \int_0^\infty F(\eta)$$

$$\frac{2\eta}{4 D_\beta t} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4 D t}\right) d\eta \quad .$$

Integrando per parti, ricordando la (2.4), e facendo poi la sostituzione $\eta = 2y\sqrt{D_\beta t}$, dalla (2.5), ricordando la (2.2), otteniamo

$$\lim_{\mu \to ct+} \frac{\partial V(\mu, t)}{\partial \mu} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{c^2 t}{4D_\beta}\right)$$

$$\int_0^{\mu_0/2\sqrt{D_\beta t}} \left(1 + \frac{cy\sqrt{t}}{\sqrt{D_\beta}}\right) \exp\left(\frac{cy\sqrt{t}}{\sqrt{D_\beta}} - y^2\right) dy +$$

$$+ \frac{c\,\mu_0}{2D_\beta} \int_{\mu_0/2\sqrt{D_\beta t}}^{\infty} \exp\left(\frac{cy\sqrt{t}}{\sqrt{D_\beta}} - y^2\right) dy \Bigg) .$$

Da quest'ultima, ricordando le (2.1)-(2.3), lo stato termico in S_β, $(\mu, t) \in D_\beta$, ed il flusso termico da S_β verso S_α possono scriversi nela forma:

$$(2.6) \qquad V(\mu, t) = hf(\mu, t) \in D_\beta \quad ,$$

$$D_\beta \lim_{\mu \to ct+} \frac{\partial V(\mu, t)}{\partial \mu} = D_\beta\, h\, C(t), \quad 0 < t < t_0 \quad ,$$

con $f(\mu, t)$ nota in D_β, così come è nota $C(t)$. Naturalmente se $h = 0$ si ha identicamente $V(\mu, t) = 0 \in D_\beta$.

Lo stato termico in S_α, cioè $V(\mu, t) \in C_L^{2,1}$ in D_α, è definito dalla (1.4), dalla (1.7) e, tenuto conto della (1.6) e della terza delle (2.6), della condizione

$$(1.6)_1 \qquad D_\alpha \lim_{\mu \to ct-} \frac{\partial V(\mu, t)}{\partial t} = Lc + D_\beta\, h\; C(t) .$$

Per la linearità del problema possiamo porre

$$(2.7) \qquad V(\mu, t) = V_1(\mu, t) + V_2(\mu, t) \quad \in D_\alpha \quad ,$$

dove sia V_1 che V_2 soddisfano la (1.4) e la (1.7) mentre

$$(2.8) \qquad D_\alpha \lim_{\mu \to ct-} \frac{\partial V_1}{\partial \mu} = Lc \ , \ D_\alpha \lim_{\mu \to ct-} \frac{\partial V_2}{\partial \mu} = D_\beta \, h \, C(t) \ .$$

Si ha immediatamente

$$(2.9) \qquad V_1(\mu, t) = L\left(1 - \exp\left(\frac{c^2 t - c\mu}{D_\alpha}\right)\right), \in D_\alpha \ .$$

Mentre V_1 è indipendente da h, per la seconda delle (2.8) si ha

$$(2.10) \qquad V_2(\mu, t) = h X(\mu, t) \ , \quad \in D_\alpha$$

ed ovviamente sarà $V_2 = 0 \in D_\alpha$ per $h = 0$. Per $V(\mu, t) \in D_\alpha$, ed anche per V_2, cfr. [4], teorema 3 e n. 3 (tenendo conto che nel nostro caso $\alpha(t)$ è nota ed $A(\mu, t) \equiv 0$).

Per il problema qui posto, di minimizzare q^2 (cfr. la (1.1)), è, come vedremo, inessenziale esprimere $V_2(\mu, t)$ essendo sufficiente osservare che per la seconda delle (2.8), nonché per la (1.4) e la (1.7), è $V_2(\mu, t) \lessgtr 0 \in D_\alpha$ a seconda che $h \gtrless 0$ e che $\dfrac{\partial^2 V_2(\mu, t)}{\partial \mu^2} \lessgtr 0$, essendo $\dfrac{\partial V_2(\mu, t)}{\partial t} \lessgtr 0 \in D_\alpha$ per il principio di minimo per le soluzioni delle equazioni del calore.

3. Determinazione del minimo dello scarto quadratico medio

Sia $h = 0$. In questo caso si ha $V(\mu, t) \equiv 0 \in D_\beta$ e $V_2(\mu, t) \equiv 0 \in D_\alpha$ e quindi $V(\mu, t) = V_1(\mu, t) \in D_\alpha$, dove $V_1(\mu, t)$ è definita dalla (2.9). Perciò dalla (1.1), ricordando la (1.2) e la (1.3), con ovvio significato dei simboli si ha:

$$(3.1) \qquad q^2 = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \frac{1}{ct} \int_0^{ct} (V_1(\mu, t) - V_{1s}(\mu, t))^2 \, d\mu) \, dt = C > 0,$$

Sia ora $h > 0$. In questo caso $V(\mu, t) \in D_\beta$ è definita dalla (2.1) e seg.ti ed è riassunta nelle (2.6). Si ha poi $V(\mu, t) = V_1(\mu, t) + V_2(\mu, t) \in D_\alpha$ e si può scrivere

$$(3.2) \qquad q^2 = A\,h^2 + 2\,B\,h + C\ ,$$

dove C è definito dalla (3.1) e non dipende da h, come non dipendono da h A e B, la loro espressione si ottiene immediatamente scrivendo per esteso la (1.1). Si verifica subito che $A > 0$. Con ovvio significato dei simboli si ha poi

$$(3.3) \qquad 2\,B\,h = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \frac{1}{ct} \int_0^{ct} (V_1\,(\mu, t) - V_{1s}(\mu, t)) \cdot (V_2\,(\mu, t) - V_{2s}(\mu, t))\,d\mu)\,dt\ ,$$

dove h compare linearmente, e può essere messo in evidenza, nella differenza $V_2\,(\mu, t) - V_{2s}\,(\mu, t)$. Si verifica facilmente che:

$$(3.4) \qquad V_1\,(\mu, t) - V_{1s}(\mu, t) \geqslant 0\ , \quad V_2\,(\mu, t) - V_{2s}\,(\mu, t) \geqslant 0 \quad \in D_\alpha\ .$$

Si ha infatti

$$(3.5) \qquad V_1\,(0, t) - V_{1s}\,(0, t) = V_1\,(ct, t) - V_{1s}\,(ct, t) = 0, \qquad 0 < t < t_0\,,$$

e inoltre

$$(3.6) \qquad \frac{\partial^2}{\partial\,\mu^2}\,(V_1\,(\mu, t) - V_{1s}\,(\mu, t)) = \frac{\partial^2}{\partial\,\mu^2}\,V_1\,(\mu, t) < 0 \qquad \in D_\alpha\,.$$

Da queste ultime segue la prima delle (3.4). Se infatti esistesse un punto $(\bar{\mu}, \bar{t}) \in D_\alpha$ per il quale $V_1\,(\bar{\mu}, \bar{t}) - V_{1s}\,(\bar{\mu}, \bar{t}) < 0$ a causa delle (3.5) dovrebbe esistere un punto $(\bar{\bar{\mu}}, \bar{t}\,) \in D_\alpha$ tale che

$$(3.7) \qquad V_1\,(\bar{\bar{\mu}}, \bar{t}) - V_{1s}\,(\bar{\bar{\mu}}, \bar{t}) < 0\ ,$$

$$\left(\frac{\partial\,(V_1\,(\mu, t) - V_{1s}(\mu, t))}{\partial\,\mu} \right)_{\substack{\mu = \bar{\bar{\mu}} \\ t = \bar{t}}} = 0\ .$$

Da qui e dalla seconda delle (3.5) la funzione della sola μ, $V_1\,(\mu, \bar{t}) - V_{1s}\,(\mu, \bar{t})$, dovrebbe crescere in tutto un intervallo compreso tra $\bar{\bar{\mu}}$ e $c\bar{t}$ e perciò dovremmo ivi avere

$$\frac{\partial (V_1(\mu, t) - V_{1s}(\mu, t))}{\partial \mu} > 0 \ .$$

Quindi, per la seconda delle (3.7), dovrebbe esistere un intervallo compreso tra $\overline{\overline{\mu}}$ e $c\overline{t}$ dove

$$\frac{\partial^2 (V_1(\mu, t) - V_{1s}(\mu, t))}{\partial \mu^2} > 0 \ ,$$

e ciò contro la (3.6). Analogamente si prova la seconda delle (3.4).

Per le (3.4) si ha $2Bh > 0$. Da qui, tenuto conto della (3.2) e della (3.1) il minimo di q^2 si ha per $h = 0$, in definitiva nel caso del problema monofase.

Dal punto di vista fisico tale soluzione è inammissibile perché dovrebbe portarsi il sistema S in uno stato sottoraffreddato prima di iniziare il cambiamento di fase. Ciò è impossibile nella tecnologia della colata dei metalli, che giungono alla lingottiera ad una temperatura superiore a quella di equilibrio liquido-solido. Il problema di ottimizzare q^2 per $h \geqslant 0$ ha quindi soltanto un interesse teorico rispetto al problema della colata dei metalli puri. Peraltro, tenuto conto della (3.2) si può ottenere un minimo di q^2 per $h = h_0 > 0$, dove h_0 può essere definito da condizioni di carattere fisico-tecnico.

BIBLIOGRAFIA

[1] Reed-Hill R.E. - *Physical Metallurgy Principles,* II^a ed. D. Van Nostrand Company - New York 1973.

[2] Carslaw H.S., Jaeger J.C. - *Conduction of Heat in Solids,* II^a Ed. Clarendon Press Oxford 1960.

[3] Quilghini D. - *Una analisi Fisico-Matematica del processo del cambiamento di fase,* Ann. Mat. pura ed appl. (4), 67, (1965).

[4] Sestini G. e Quilghini D. - *Un problema bifase, unidimensionale piano, inverso di quello di Stefan,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 68 (1982).

Global solution to a non linear integral evolution problem in particle transport theory

SALVATORE RIONERO
Dipartimento di Matematica e Applicazioni
dell'Università di Napoli, Via Mezzocannone 8
80134 Napoli

1. Introduction

Let $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ be the one particle distribution function in a gas of particles which diffuse in an infinite homogeneous medium through binary collisions. The evolution of f is determined by the Boltzmann integro-differential equation [1, 2, 3]

$$(1) \qquad \left(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}\right) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = C(f, f)$$

where m is the mass particle, $\mathbf{F}$ is the external force and $C(f, f)$ is the collisional term. In this paper $C(f, f)$ is supposed to satisfy the so-called scattering Kernel formulation [4, 5]. Moreover we assume that

i) $\mathbf{F} = 0$, $\nabla_{\mathbf{x}} f = 0$

ii) the cross sections obey the $\dfrac{K}{|\mathbf{v}|}$ – law (K = positive constant)

iii) at time $t = 0$, Q particles (per unit volume) are injected with the velocity distribution $S(\mathbf{v})$ by a pulsed source $Q^* = Q\, S(\mathbf{v})\, \delta(t)$[1].

---

(1) The symbol $\delta(t)$ represents the Dirac delta function. Without loss, we adopt the normalization

$$\int_{R_3} S(v)\, dv = 1 \ .$$

Then, it has been shown that [5] equation (1) is equivalent to

$$f = Af \tag{2}$$

where A is the non-linear integral inhomogeneous operator

$$Af = Q\,S(\mathrm{v})\,e^{-KQt} + \tag{3}$$

$$+K\,e^{-KQt}\int_0^t e^{KQ\tau}\,d\tau \int_{R_3}\int_{R_3} \pi(\mathrm{v}',\mathrm{v}'',\mathrm{v})\,f(\mathrm{v}',\tau)\,f(\mathrm{v}'',\tau)\,d\mathrm{v}'\,d\mathrm{v}''.$$

In (3) the function $\pi(\mathrm{v}',\mathrm{v}'',\mathrm{v})$ is the scattering probability distribution wich is a non-negative function on $R_3 \times R_3 \times R_3$, is summable with respect to v and obeys respectively the normalization and symmetry conditions

$$\int_{R_3} \pi(\mathrm{v}',\mathrm{v}'',\mathrm{v})\,d\mathrm{v} = 1 \quad , \quad \pi(\mathrm{v}',\mathrm{v}'',\mathrm{v}) = \pi(\mathrm{v}'',\mathrm{v}',\mathrm{v}) \tag{4}$$

where v' and v'' are the velocities before collisions.

Let T be any positive constant and let E be the Banach functional space

$$E = \{\varphi(\mathrm{v},t) : R_3 \times [0,T] \to R;\ \varphi(\mathrm{v},t) \in L_1(R_3),\quad t \in [0,T]; \tag{5}$$
$$\varphi(\mathrm{v},t) \in C[0,T],\qquad \mathrm{v} \in R_3\}$$

equipped with the norm

$$|||\varphi||| = \max_{[0,T]} \|\varphi\|_t \qquad (\|\cdot\| = L_1 - \text{norm}) . \tag{6}$$

Furthermore, let B denote the closed ball

$$B = \{\varphi \in E : |||\varphi||| \leqslant Q\} . \tag{7}$$

In [6] has been proved that

Theorem I

For any positive finite T, $\mathrm{A\,B} \subset \mathrm{B}$ and $\exists\ n(T) \in N$ such that A^n is a contractive mapping. The global existence and uniqueness of solution to equation (2) therefore immediately follows.

The aim of the present paper is to provide an alternative proof to theorem I which is simpler and more direct. In addition, we give condi-

tions garanteering the ess. sup. convergence of the sequence of the successive approximations. Thus, in sect 2 we equip the space E with the weighted norm

$$|||\varphi|||_w = |||e^{-KQt}\varphi||| \tag{8}$$

and we indicate by B^* the set B equipped with the norm (8)[2]

$$B^* = \{\varphi \in E : |||\varphi||| \leqslant Q \quad , \quad |||\varphi|||_w \leqslant Q\} . \tag{9}$$

Then we show that

Theorem II

In the space E equipped with the norm (8), one has $AB^* \subset B^*$ and moreover A is a contractive mapping. Hence we obtain global existence and uniqueness of a solution to equation (2).

In sect. 3 we prove that

Theorem III

If the functions S and π satisfy, with respect to v *and uniformly with respect to* v′ and v″, *a Lipschitz condition in the point-wise norm or if they are bounded, then the sequence of the successive approximations converges to the solution in the ess. sup. norm.*

In proving theorem III we need some lemmas whose proof is given in an appendix (sect. 4).

2. Proof of theorem II

i) *A maps B^* into itself: $AB^* \subset B^*$*

From (2), it clearly follows that

$$|A\varphi| \leqslant Q\,S\,e^{-KQt} +$$

$$+ K e^{-KQt} \int_0^t e^{KQ\tau}\, d\tau \int_{R_3}\int_{R_3} \pi(\mathrm{v}', \mathrm{v}'', \mathrm{v})\,|\varphi(\mathrm{v}', \tau)\,\varphi(\mathrm{v}'', \tau)|\, d\mathrm{v}' d\mathrm{v}''$$

---

[2] Let us note that

$$e^{-KQT}\,|||\varphi||| \leqslant |||\varphi|||_W \leqslant |||\varphi||| ,$$

which implies that the weighted norm is equivalent to the norm (6).

so that on taking into account equation $(4)_1$, we have

$$\|A\varphi\|_t \leqslant Q\,e^{-KQt} + K\,e^{-KQt} \int_0^t e^{KQ\tau}\;\|\varphi\|_\tau^2\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant Q\,e^{-KQt} + KQ^2\,e^{-KQt} \int_0^t e^{KQ\tau}\,d\tau \leqslant Q\,.$$

Hence we obtain

$$|||A\varphi||| \leqslant Q \;\Rightarrow\; |||A\varphi|||_w \leqslant Q\,.$$

ii) *A is a contractive mapping*

On recalling equation $(4)_2$, we have

$$A\varphi - A\psi = K\,e^{-KQt} \int_0^t e^{KQ\tau}\,d\tau \int_{R_3}\int_{R_3} \pi(\mathrm{v}',\mathrm{v}'',\mathrm{v})\,[\varphi(\mathrm{v}',\tau) +$$

$$+\,\psi(\mathrm{v}',\tau)]\,[\varphi(\mathrm{v}'',\tau) - \psi(\mathrm{v}'',\tau)]\,d\mathrm{v}'\,d\mathrm{v}''$$

which implies

$$\|e^{-KQt}(A\varphi - A\psi)\|_t \leqslant K\,e^{-2KQb} \int_0^t e^{KQ\tau}\,\|\varphi+\psi\|_\tau\,\cdot$$

$$\cdot\,\|\varphi-\psi\|_\tau\,d\tau \leqslant 2\,KQ\,e^{-2KQt} \int_0^t e^{2KQ\tau}\,\cdot$$

$$\cdot\,e^{-KQ\tau}\,\|\varphi-\psi\|_\tau\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant e^{-2KQt}\,|||\varphi-\psi|||_w\,(e^{2KQt}-1) =$$

$$= (1-e^{-2KQt})\,|||\varphi-\psi|||_w\,.$$

Hence we obtain

$$|||A\varphi - A\psi|||_w \leqslant (1-e^{-2KQT})\,|||\varphi-\psi|||_w\,.$$

Taking into account that B closed implies that B^* is closed too, the theorem II is acquired by means of the Caccioppoli-Banach point fix theorem [8].

Remark 1

Let $\{f_n\}$ be the sequence of the successive approximations

$$(10) \qquad \begin{aligned} & f_n = A\ f_{n-1} \qquad\qquad (n = 1, 2, \ldots) \\ & f_0 \in Q \end{aligned}$$

and let $f = \lim_{n \to \infty} f_n$. It follows that

$$\nabla \epsilon > 0,\ \exists\, \bar{n} : e^{-KQT}\ |||f - f_n||| \leqslant |||f - f_n|||_w < \epsilon \ ,\ n \geqslant \bar{n}$$

which implies

$$|||f - f_n||| \leqslant \epsilon\ e^{KQT} \ , \quad n \geqslant \bar{n}$$

i.e. the sequence of the successive approximations converges to f in the L_1 − norm, uniformly with respect to t in any finite interval $[0, T]$.

Remark 2

Choosing

$$\begin{aligned} & f_0(\mathbf{v}) = Q\, S(\mathbf{v}) > 0 \\ & \| f_0(\mathbf{v}) \| = Q \ , \end{aligned}$$

from $f_n = A\ f_{n-1}$ it follows that

$$f_n > 0 \ , \quad \| f_n \| = Q \qquad\qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

which implies

$$f > 0 \qquad \| f \| = Q\,.$$

3. Proof of theorem III

In proving theorem III we need the following two lemmas whose proof is given in the appendix (sec. 4).

Lemma 1

Let (a. e.)

$$(11)\qquad \begin{cases} \psi(\mathrm{x}) \in L_1(R_3) \\ |\psi(\mathrm{x}_2) - \psi(\mathrm{x}_1)| \leqslant a\,|\mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_1|, \qquad (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in R_3\,; a = \text{positive constant}). \end{cases}$$

Then

$$(12)\qquad |\psi(\mathrm{x})| \leqslant \int_{R_3} |\psi|\,d\mathrm{x} + \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} a \qquad \text{(a. e.)}$$

Lemma 2

Let the assumptions (10) hold. Then

$$(13)\qquad |\psi(x)| \leqslant \lambda \left[\left(\int_{R_3} \psi^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}+\epsilon} + \left(\int_{R_3} \psi^2\,dy\right)^{\epsilon}\right]^{\frac{1}{1+2\epsilon}} \qquad \text{(a. e.)}$$

where λ *is a constant indipendent of* x *and* $0 < \epsilon < \dfrac{1}{3}$.

We are now in position to prouve the theorem III.

When S and π satisfy, with respect to v and uniformly with respect to v_1 and v_2, a Lipschitz condition in the ess. sup. norm from equations (2) and (10) follow that also f and f_n $(n = 1, 2, ...)$ satisfay a Lipschitz condition with respect to v, uniformly with respect to t in any interval $[0, T]$[3]. Then by lemma 1 it follows that

---

[3] Let

$$|S(\mathrm{v}'') - S(\mathrm{v}')|,\ |\pi(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}'') - \pi(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}')| < M\,|\mathrm{v}'' - \mathrm{v}'|$$

where M is a positive constant. From equation (2) easily follows

$$|f(\mathrm{v}'', t) - f(\mathrm{v}', t)| \leqslant Q\,|S(\mathrm{v}'') - S(\mathrm{v}')| +$$

$$+ K e^{-KQt} \int_0^t e^{KQ\tau} \int_{R_3}\int_{R_3} |\pi(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}'') - \pi(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}')| \cdot |f(\mathrm{v}_1, \tau)| \cdot$$

$$\cdot |f(\mathrm{v}_2, \tau)|\, d\mathrm{v}_1\, d\mathrm{v}_2 \leqslant 2QM\,|\mathrm{v}'' - \mathrm{v}'| \ .$$

In the same way we obtain

$$|f_n(\mathrm{v}'', t) - f_n(\mathrm{v}', t)| \leqslant 2QM\,|\mathrm{v}'' - \mathrm{v}'| \ .$$

$$(14) \qquad |f_n|, |f| \leqslant Q + \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} M \qquad (n \in N, \ t \in [0, T])$$

and hence

$$(15) \qquad \begin{aligned} & f_n, f \in L_2(R_3) \\ & |f - f_n| < 2 \quad Q + \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} M \end{aligned} \qquad (n \in N, \ t \in [0, T])$$

By lemma 2 it follows that

$$(16) \qquad |f - f_n| < \lambda \left[\left(\int_{R_3} |f - f_n|^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2} + \epsilon} + \right.$$
$$\left. + \left(\int_{R_3} |f - f_n|^2 \, dy \right)^{\epsilon} \right]^{\frac{1}{1+2\epsilon}}$$

and, on letting

$$(17) \qquad \begin{cases} b = 2 \left[Q + \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} M \right] \\ l = \max \left(b^{\frac{1}{2} + \epsilon}, b^{\epsilon} \right) \end{cases}$$

we get

$$(18) \qquad |f - f_n) \leqslant \lambda \, l^{\frac{1}{1+2\epsilon}} \left[\left(\int_{R_3} |f - f_n| dy \right)^{\frac{1}{2} + \epsilon} + \right.$$
$$\left. + \left(\int_{R_3} |f - f_n| dy \right)^{\epsilon} \right]^{\frac{1}{1+2\epsilon}} .$$

Therefore $\{f_n\}$ converges in the ess. sup. norm (and uniformly with respect to t in any interval $[0, T]$[(4)]) to the solution to equation 2.

In the case in which S and π are bounded:

---

(4) Let us note that λ is indipendent of t (see the proof of lemma 2 in sec. 4).

$$S(\mathrm{v}) + \pi(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}) < M_1 \qquad (M_1 = \text{positive constant } \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v} \in R_3),$$

easily follows [7] [5]

$$|f_n|, |f| \leqslant 2 M_1 Q$$

and hence

$$f_n, f \in L_2 (R_3)$$

$$|f - f_n| < 4 M_1 Q \ .$$

On letting

$$l_1 = \max [(4 M_1 Q)^{\frac{1}{2} + \epsilon}, (4 M_1 Q)^{\epsilon}]$$

we get

$$|f - f_n| \leqslant \lambda\, l_1^{\frac{1}{1+2\epsilon}} \left[\left(\int_{R_3} |f - f_n| \, dy \right)^{\frac{1}{2} + \epsilon} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{R_3} |f - f_n| \, dy \right)^{\epsilon} \right]^{\frac{1}{1+2\epsilon}} \qquad \text{s.d.e.}$$

(5) From (2) we obtain

$$|f(\mathrm{v}, t)| \leqslant Q M_1 + M_1 K e^{-KQt} \int_0^t e^{KQ\tau} d\tau \int_{R_3} |f(\mathrm{v}_1, \tau)| \, d\mathrm{v}_1 \int_{R_3} |f(\mathrm{v}_2, \tau)| \, d\mathrm{v}_2 \leqslant$$

$$\leqslant Q M_1 + M_1 Q^2 K e^{-KQt} \int_0^t e^{KQt} d\tau \leqslant 2 M_1 Q$$

In the same way it follows

$$|f_n| \leqslant 2 M_1 Q .$$

4. Appendix

i) *Proof of lemma 1*

Let S_x be the ball with the origin at x and radius $\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3}$. From $(11)_2$ it follows that

$$|\psi(x)| \leqslant |\psi(y)| + a\,|y - x|\ , \qquad \text{(a. e.)}$$

Hence integrating over S_x, (12) follows

ii) *Proof of lemma 2*

Let (r, ϑ) be a polar coordinate system with the origin at x such that

$$S_x = \left\{ r \in \left[0, \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3}\right],\ \vartheta \in A \right\}$$

where A is the domain of ϑ.

The assumptions of lemma 1 assure that

$$\psi \in L_1\,(R_3) \cap L_2\,(R_3)$$

and that $\nabla_x \psi$ exists and belongs to $L_1(\Omega)$ on any compact set $\Omega \subset R_3$. Hence it follows that

$$|\psi(x)|^{1+2\epsilon} = |\psi(r, \vartheta)|^{1+2\epsilon} - \int_0^r \frac{d}{d\xi}\,|\psi|^{1+2\epsilon}\,d\xi$$

$$r < R = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3}$$

which implies

$$|\psi(x)|^{1+2\epsilon} \leqslant |\psi(r, \vartheta)|^{1+2\epsilon} + (1+2\epsilon)\,a \int_0^R |\psi(\xi, \vartheta)|^{2\epsilon}\,d\xi$$

where a is the positive constant which appear in the Lipschitz condition.

Integrating both sides of this inequality over S_x and accounting for Hölder inequality, it follows that

$$|\psi(x)|^{1+2\epsilon} \leqslant \left(\int_{S_x} |\psi|^2\, dy\right)^{\frac{1}{2}+\epsilon} +$$

$$+ (1+2\epsilon) a \int_0^R r^2\, dr \int_A dA \int_0^R |\psi(\xi,\vartheta)|^{2\epsilon} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{S_x} |\psi|^2\, dy\right)^{\frac{1}{2}+\epsilon} +$$

$$+ \frac{(1+2\epsilon) a R^3}{3} \left(\int_{S_x} \psi^2\, dy\right)^{\epsilon} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{S_x} r^{-\frac{2}{1-\epsilon}}\, dy\right)^{1-\epsilon} .$$

Hence, choosing $\epsilon \in \,]0, \frac{1}{3}[$, inequality (13) follows.

Acknowledgments

This research has been performed under the auspices of the G.N.M.F. of the C.N.R. and has been partially supported by the Italian Ministry for Education (M.P.I.) under 40% and 60% contracts. The author also wishes to acknoweledg the interest shown in this work by Prof. R. Knops and the warm hospitality extended to him by the Department of Mathematics of the Heriot-Watt University during a recent visit.

REFERENCES

[1] Krook M. - Wu T.T.- Phys. Rev. Lett. 36, 1107 (1976) and Phys. of Fluids 20, 1589 (1977).

[2] Waldmann L. - Handbuch der Phys., vol. 12, ed. S. Flugge, Springer -Verlag, Berlin 1958.

[3] Cercignani C. - *Theory and application of the Boltzmann Equation,* Scottish Acad. Press 1975.

[4] Boffi V.C. - Molinaro V.G. - Nuovo Cimento B 65, 29 (1981).

[5] Boffi V.C., Spiga G. - J. Math. Phys. 23, 1859 (1982).

[6] Boffi V.C., Spiga G. - J. Math. Phys. 23, 2299 (1982).

[7] Rionero S. - Guerriero G. - *On the stability of the solutions to a non linear integral evolution equation arising in particle transport theory,* to appear in Meccanica.

[8] Kantarovic L.V. - Akilov G.P. - *Analisi funzionale,* Editori Riuniti 1980, pp. 626-627.

Differential geometry of mechanical systems with constraints

WLODZIMIERZ M. TULCZYJEW
Department of Mathematics and Statistics
University of Calgary (Canada)

A geometric formulation of analytical mechanics of systems with holonomic and nonholonomic constraints is proposed. The formulation is based on the concept of a generating form studied in a more general setting by Pidello in "Submanifolds of cotangent bundles generated by generating forms" (to appear).

1. Geometric structures

We denote by $C^\infty(Q', Q)$ the set of all differentiable mappings from a differential manifold Q to a manifold Q'. The set $C^\infty(\mathbf{R}, Q)$ is the algebra of differentiable functions on Q. The set $C^\infty(Q, \mathbf{R})$ is the set of differentiable curves in Q. We introduce an equivalence relation in this set. Two curves $\gamma : \mathbf{R} \to Q$ and $\gamma' : \mathbf{R} \to Q$ are equivalent if $(g \cdot \gamma')(0) = (g \cdot \gamma)(0)$ and $D(g \cdot \gamma')(0) = D(g \cdot \gamma)(0)$ for each function g in $C^\infty(\mathbf{R}, Q)$. The set of equivalence classes is denoted by $\mathrm{T}Q$ and called the *tangent bundle* of Q. The *tangent bundle projection* $\tau_Q : \mathrm{T}Q \to Q$ is defined by $\tau_Q(t_0^1 \gamma) = \gamma(0)$, where $t_0^1 \gamma$ denotes the equivalence class of γ. The set $\mathrm{T}Q$ is a differential manifold and the projection $\tau_Q : \mathrm{T}Q \to Q$ is a differential fibration. For each differentiable mapping $\alpha : Q \to Q'$ we have a differentiable mapping $\mathrm{T}\alpha : \mathrm{T}Q \to \mathrm{T}Q'$ defined by $\mathrm{T}\alpha(t_0^1 \gamma) = t_0^1(\alpha \cdot \gamma)$. For each differentiable function g on Q we define a function $\mathrm{d}_T g$ on $\mathrm{T}Q$ by $\mathrm{d}_T g(t_0^1 \gamma) = \mathrm{D}(g \cdot \gamma)(0)$. Let C be a submanifold of Q. A curve in C is at the same time a curve in Q. It follows that the tangent bundle $\mathrm{T}C$ can be identified with a subset of $\mathrm{T}Q$. If functions q^κ, $(\kappa = 1, 2, \ldots, n)$ form a coordinate system in an open submanifold U of Q then functions q^κ, $\dot{q}^\lambda$, $(\kappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$ defined on $\mathrm{T}Q$ by $q^\kappa(t_0^1 \gamma) = (q^\kappa \cdot \gamma)(0)$ and $\dot{q}^\lambda(t_0^1 \gamma) = \mathrm{D}(q^\lambda \cdot \gamma)(0)$ form a coordinate system in $\mathrm{T}U = \tau_Q^{-1}(U)$. Functions $\dot{q}^\lambda$ may also be denoted by δq^λ

depending on the interpretation of the elements of TQ. For each point of a submanifold C of Q there exists a neighbourhood U such that the intersection of C with U is described by equations $C^{\alpha}(q^{\kappa}(q))=0$, where C^{α}, $(\alpha=1, \ldots, m)$ are functions on $\mathbf{R}^{n}$.

Let q be a point in Q. For each function g in $C^{\infty}(\mathbf{R}, Q)$ we denote by $\mathrm{d}_q g: \mathrm{T}_q Q \to \mathbf{R}$ the mapping obtained by restricting $\mathrm{d}_T g$ to the fibre $T_q Q = \tau_Q^{-1}(q)$. This mapping is called the *differential* of g at q. The set of differentials of all differentiable functions at q is a vector space denoted by $\mathrm{T}_q{}^*Q$. Spaces $\mathrm{T}_q{}^*Q$ are fibres of a vector bundle $\mathrm{T}^*Q = \cup_{q \in Q} \mathrm{T}_q{}^*Q$ called the *cotangent bundle* of Q. The *cotangent bundle projection* $\pi_Q: \mathrm{T}Q \to Q$ is defined by $\pi_Q(\mathrm{d}_q g)=q$. The mapping ϕ_q from a fibre $\mathrm{T}_q Q$ to the space $(\mathrm{T}_q{}^*Q)^*$ dual to $\mathrm{T}_q{}^*Q$ defined by $\phi_q(t_0^1\gamma)(\mathrm{d}_q g)=\mathrm{D}(g\cdot\gamma)(0)$ is clearly injective. Let q^{κ}, $(\kappa=1,2,\ldots,n)$ be coordinates in a neighbourhood of a point q and let $\hat{u}: \mathrm{T}_q{}^*Q \to \mathbf{R}$ be a linear mapping. Let $\gamma: \mathbf{R} \to Q$ be a curve characterized by $q^{\kappa}(\gamma(t)) = q^{\kappa}(q)+\hat{u}(\mathrm{d}_q q^{\kappa})t$ for t sufficiently close to 0. Then $\phi_q(t_0^1\gamma)=\hat{u}$. It follows that ϕ_q is surjective. Consequently the tangent bundle TQ has a canonical structure of a vector bundle such that the cotangent bundle T^*Q is the dual bundle of TQ. Let $\mathrm{T}Q \times_Q \mathrm{T}^*Q$ denote the fibre product of the fibrations $\tau_Q: \mathrm{T}Q \to Q$ and $\pi_Q: \mathrm{T}Q \to Q$. Elements of $\mathrm{T}Q \times_Q \mathrm{T}^*Q$ are pairs (v, p) in $\mathrm{T}Q \times \mathrm{T}^*Q$ such that $\tau_Q(v)=\pi_Q(p)$. The function $\langle,\rangle: \mathrm{T}Q \times_Q \mathrm{T}^*Q \to \mathbf{R}$ defined by $\langle t_0^1\gamma, \mathrm{d}_q g\rangle = \mathrm{D}(g\cdot\gamma)(0)$ is called the *canonical pairing* of the tangent bundle with the cotangent bundle. The mapping $\mathrm{d}g: Q \to \mathrm{T}^*Q$ defined by $\mathrm{d}g(q)=\mathrm{d}_q g$ is a 1-form on Q called the *differential* of g. Let q^{κ}, $(\kappa=1,2,\ldots,n)$ be coordinates in an open submanifold U of Q. The differentials $\mathrm{d}_q q^{\kappa}$ form a linear basis of the space $\mathrm{T}_q{}^*Q$ at each point q in U. The dual basis of $\mathrm{T}_q Q$ is formed by vectors $\partial_{\kappa}(q)$ satisfying relations $\langle\partial_{\kappa}(q), \mathrm{d}_q q^{\lambda}\rangle = \delta_{\kappa}^{\lambda}$. Each vector $\partial_{\kappa}(q)$ is the equivalence class of a curve γ_{κ} characterized by $q^{\lambda}(\gamma_{\kappa}(t)) = q^{\lambda}(q)+\delta_{\kappa}^{\lambda}t$ for t sufficiently close to 0. Functions $\dfrac{\partial g}{\partial q^{\kappa}}$, $(\kappa=1,\ldots,n)$ defined on U by $\dfrac{\partial g}{\partial q^{\kappa}}(q)=\langle\partial_{\kappa}(q), \mathrm{d}g\rangle$ are the partial derivatives of a function g. Functions q^{κ}, p_{λ}, $(\kappa, \lambda=1,2,\ldots,n)$ defined on T^*Q by $q^{\kappa}(\mathrm{d}_q g)=q^{\kappa}(q)$ and $p_{\lambda}(\mathrm{d}_q g)=\partial_{\lambda}g$ are coordinates in $\mathrm{T}^*U=\pi_Q^{-1}(U)$. The coordinates p_{λ} are denoted by f_{λ} if the elements of T^*Q are interpreted as generalized forces. Using coordinates $q^{\kappa}, \delta q^{\lambda}$, $(\kappa, \lambda=1,2,\ldots,n)$ in TU and coordinates q^{κ}, f_{μ}, $(\kappa, \mu=1,2,\ldots,n)$ in T^*U we can describe $\mathrm{T}U \times_U \mathrm{T}^*U$ as the set of pairs (v, f) in $\mathrm{T}U \times \mathrm{T}^*U$ satisfying $q^{\kappa}(v)=q^{\kappa}(f)$. The canonical pairing is described locally by $\langle v, f\rangle = f_{\kappa}(f)\delta q^{\kappa}(v)$. The *Liouville form* is a 1-form θ_Q on T^*Q defined by $\langle w, \theta_Q\rangle = \langle \mathrm{T}\pi_Q(w), \tau_{\mathrm{T}^*Q}(w)\rangle$. The *canonical 2-form*

$\omega_Q = d\theta_Q$ defines a symplectic structure on the manifold T^*Q. Local expressions of the forms θ_Q and ω_Q in a coordinate system q^κ, f_λ, $(\kappa, \lambda = 1, 2, ..., n)$ are $\theta_Q = f_\kappa dq^\kappa$ and $\omega_Q = \mathrm{d}f_\kappa \wedge \mathrm{d}q^\kappa$.

Coordinates q^κ, $(\kappa = 1, 2, ..., n)$ in an open submanifold U of Q induce coordinates $q^\kappa, \dot{q}^\lambda, (\kappa, \lambda = 1, 2, ..., n)$ in $TU = \tau_Q^{-1}(U)$. These coordinates in turn induce coordinates $q^\kappa, \dot{q}^\lambda, \delta q^\mu, \delta\dot{q}^\nu, (\kappa, \lambda, \mu, \nu = 1, 2, ..., n)$ in $TTU = \tau_{TQ}^{-1}(\tau_Q^{-1}(U))$. Let χ be a differentiable mapping from $\mathbf{R}^2$ to Q. For each s we denote by $\chi_s : \mathbf{R} \to Q$ the curve defined by $\chi_s(t) = \chi(s, t)$. We denote by $t_0^1\chi : \mathbf{R} \to TQ$ the curve defined by $t_0^1\chi(s) = t_0^1\chi_s$. To each mapping χ there corresponds a vector $t_0^1 t_0^1 \chi$ in TTQ. We show that all elements of TTQ can be obtained in this way. Let w be a vector in TTQ and let q^κ, $(\kappa = 1, 2, ..., n)$ be coordinates in an open neighbourhood U of $q = \tau_Q(\tau_{TQ}(w))$. We choose a mapping $\chi : \mathbf{R}^2 \to Q$ characterized by

$$q^\kappa(\chi(s, t) = q^\kappa(w) + t\dot{q}^\kappa(w) + s\delta q^\kappa(w) + st\delta\dot{q}^\kappa(w)$$

for t and s sufficiently close to 0. Elements of $C^\infty(Q, \mathbf{R}^2)$ will be used as representatives of vectors in TTQ. In terms of this representation we define mapping $\kappa_Q : TTQ \to TTQ$ by $\kappa_Q(t_0^1 t_0^1 \chi) = \kappa_Q(t_0^1 t_0^1 \tilde{\chi})$, where $\tilde{\chi} : \mathbf{R}^2 \to Q$ is defined by $\tilde{\chi}(s, t) = \chi(t, s)$. Relations $\kappa_Q \cdot \kappa_Q = 1_{TTQ}$, $\tau_{TQ} \cdot \kappa_Q = T\tau_Q$ and $T\tau_Q \cdot \kappa_Q = \tau_{TQ}$ are easily verified. The mapping κ_Q is called the *natural involution* in TTQ. Local characterization of κ_Q is provided by relations $q^\kappa \cdot \kappa_Q = q^\kappa$, $\dot{q}^\lambda \cdot \kappa_Q = \delta q^\lambda$, $\delta q^\mu \cdot \kappa_Q = \dot{q}^\mu$, $\delta\dot{q}^\nu \cdot \kappa_Q = \delta\dot{q}^\nu$.

A curve $\zeta : \mathbf{R} \to TQ \times_Q T^*Q$ is a pair of curves $\xi : \mathbf{R} \to TQ$ and $\eta : \mathbf{R} \to T^*Q$ such that $\tau_Q \cdot \xi = \pi_Q \cdot \eta$. The tangent vector $t_0^1\zeta$ can be identified with the pair (w, u) of vectors $w = t_0^1\xi$ and $u = t_0^1\eta$ in TTQ and TT^*Q satisfying $T\tau_Q(w) = T\pi_Q(u)$. It follows that the tangent bundle $T(TQ \times_Q T^*Q)$ can be identified with the fibre product $TTQ \times_{TQ} TT^*Q$ of fibrations $T\tau_Q : TTQ \to TQ$ and $T\pi_Q : TT^*Q \to TQ$. With this identification the mapping $\mathrm{d}_T\langle\,,\rangle : T(TQ \times_Q T^*Q) \to \mathbf{R}$ becomes a function on $TTQ \times_{TQ} TT^*Q$. Coordinates q^κ, $(\kappa = 1, 2, ..., n)$ in an open submanifold U of Q induce coordinates $q^\kappa, \dot{q}^\lambda, \delta q^\mu, \delta\dot{q}^\nu, (\kappa, \lambda, \mu, \nu = 1, 2, ..., n)$ in TTU and coordinates $q^\kappa, p_\rho, \dot{q}^\lambda, \dot{p}_\sigma$, $(\kappa, \lambda, \rho, \sigma = 1, 2, ..., n)$ in TT^*U. The fibre product $TTU \times_{TU} TT^*U$ is the set of pairs (w, u) in $TTU \times TT^*U$ satisfying $q^\kappa(w) = q^\kappa(u)$ and $\dot{q}^\lambda(w) = \dot{q}^\lambda(u)$. The function $\mathrm{d}_T\langle\,,\rangle$ is described locally by $\mathrm{d}_T\langle w, u\rangle = \dot{p}_\kappa(u)\,\delta q^\kappa(w) + p_\kappa(u)\,\delta\dot{q}^\kappa(w)$.

1. Statics of mechanical systems

Let Q be the *configuration manifold* of a mechanical system. The tangent bundle $\mathrm{T}Q$ is the bundle of *virtual displacements* of the system. The cotangent bundle T^*Q represents the *force bundle* of the system. Elements of the force bundle are (generalized) forces which can be applied to the system. The set of forces which can be applied to the system maintaining states of static equilibrium is a subset S of T^*Q. This set is usually described by a variational principle. For a system without constraints the variational definition of S has the form

$$S = \{ f \in \mathrm{T}^*Q \; ; \langle v, f \rangle = \langle v, \mathrm{d}V \rangle \text{ for each } v \in \mathrm{T}Q \text{ such that } \tau_Q(v) = \pi_Q(f) \} ,$$

where $V : Q \to \mathbf{R}$ is the potential energy of the system. Most general constraints consist of a submanifold C of Q and a subbundle A of the bundle $T_C Q = \tau_Q^{-1}(C)$. Constraints are said to be *holonomic* if $A = \mathrm{T}C$. For *nonholonomic* constraints A is usually a subbundle of $\mathrm{T}C$. Examples of more general constraints can also be found. The case of no constraints is covered by $C = Q$ and $A = \mathrm{T}Q$. In the presence of constraints the set S is described by

$$S = \{ f \in \mathrm{T}^*Q \; ; \; q = \pi_Q(f) \in C, \langle v, f \rangle = \langle v, \mathrm{d}V \rangle \text{ for each } v \in A_q = A \cap \mathrm{T}_q Q \} .$$

A local coordinate system q^κ, $(\kappa = 1, \ldots, n)$ in Q induces local coordinate systems q^κ, δq^λ, $(\kappa, \lambda = 1, \ldots, n)$ and q^κ, p_λ, $(\kappa, \lambda = 1, \ldots, n)$ in $\mathrm{T}Q$ and T^*Q. Let C be a submanifold of Q described locally by $C^\alpha(q^\kappa(q)) = 0$, $(\alpha = 1, \ldots, m)$ and let A be a subbundle of $\mathrm{T}_C Q$ described locally by $A^i_\lambda(q^\kappa(v))\, \delta q^\lambda(v) = 0$, $(i = 1, \ldots, k)$. The local form of the variational principle defining S is

$$C^\alpha(q^\kappa) = 0 \; , (\alpha = 1, \ldots, m) \text{ and } f_\kappa \, \delta q^\kappa = \frac{\partial V}{\partial q^\kappa} \, \delta q^\kappa$$

for all virtual displacements δq^λ such that

$$A^i_\lambda (q^\kappa (v))\, \delta q^\lambda (v) = 0 \,, \quad (i = 1, ..., k) \,,$$

where $q^\kappa = q^\kappa (f) = q^\kappa (v)$, $f_\kappa = f_\kappa (f)$ and $\delta q^\kappa = \delta q^\kappa (v)$.

2. Lagrangian formulation of dynamics with constraints

We denote by $\mathrm{TT}^*Q \times_Q \mathrm{T}^*Q$ the fibre product of the fibrations $\pi_Q \cdot \tau_{\mathrm{T}^*Q} : \mathrm{TT}^*Q \to Q$ and $\pi_Q : \mathrm{T}^*Q \to Q$. Dynamics of a mechanical system with constraints and external forces is represented by a submanifold D of $\mathrm{TT}^*Q \times_Q \mathrm{T}^*Q$. This submanifod is to be interpreted as a differential equation for curves in the fibre product $\mathrm{T}^*Q \times_Q \mathrm{T}^*Q$ of the *momentum bundle* with the *force bundle*. The submanifold D is usually defined by a *Lagrangian variational principle* of the form

$$D = \{(u, f) \in \mathrm{TT}^*Q \times_Q \mathrm{T}^*Q \,;\, v = \mathrm{T}\pi_Q (u) \in K \,,$$

$$\mathrm{d}_T \langle \kappa_Q (w), u \rangle - \langle \mathrm{T}\tau_Q (w), f \rangle = \langle w, \mathrm{d}L \rangle$$

$$\text{for each } \; w \in B_v = B \cap \mathrm{T}_v \mathrm{T}Q\} \,,$$

where $L : \mathrm{T}Q \to \mathbf{R}$ is the *Lagrangian*, K is a submanifold of $\mathrm{T}Q$ and B is a subbundle of $\mathrm{T}_K \mathrm{T}Q = \overset{-1}{\tau}_{\mathrm{T}Q} (K)$. For a system without constraints $K = \mathrm{T}Q$ and $B = \mathrm{TT}Q$. Constraints are said to be *holonomic if* K is the tangent bundle $\mathrm{T}C$ of a submanifold C of Q and $B = (\mathrm{T}\tau_Q)^{-1} (K) \cap \cap\, \mathrm{T}_K \mathrm{T}Q$. For *nonholonomic* constraints usually studied K is a subbundle of the tangent bundle of a submanifold C and B is a subbundle of $(\mathrm{T}\tau_Q)^{-1} (K) \cap \mathrm{T}_K \mathrm{T}Q$.

A local coordinate system q^κ, $(\kappa = 1, ..., n)$ in Q induces local coordinates q^κ, f_λ, $(\kappa, \lambda = 1, ..., n)$ in T^*Q. In TT^*Q and $\mathrm{TT}Q$ we have induced coordinates q^κ, p_λ, $\dot{q}^\mu$, $\dot{p}_\nu$ and q^κ, $\dot{q}^\lambda$, δq^μ, $\delta \dot{q}^\nu$, $(\kappa, \lambda, \mu, \nu = = 1, ..., n)$. Let K be a submanifold of $\mathrm{T}Q$ described locally by $K^\alpha (q^\kappa (v), \dot{q}^\lambda (v)) = 0$, $(\alpha = 1, ..., m)$ and let B be a subbundle of $\mathrm{T}_K \mathrm{T}Q$ described locally by

$$B^i_\mu (q^\kappa (v), \dot{q}^\lambda (v))\, \delta q^\mu (v) + B'^i_\mu (q^\kappa (v), \dot{q}^\lambda (v))\, \delta \dot{q}^\mu (v) = 0, \quad (i = 1, ..., k).$$

The local form of the variational principle defining D is

$K^{\alpha}(q^{\kappa}, \dot{q}^{\lambda})=0, \ (\alpha=1, \ldots, m)$ and

$$(\dot{p}_{\kappa}-f_{\kappa})\,\delta q^{\kappa}+p_{\kappa}\,\delta\dot{q}^{\kappa}=\frac{\partial L}{\partial q^{\kappa}}\,\delta q^{\kappa}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\kappa}}\,\delta\dot{q}^{\kappa}$$

for all $\delta q^{\kappa}, \delta\dot{q}^{\kappa}$ such that

$$B^{i}_{\mu}(q^{\kappa}, \dot{q}^{\lambda})\,\delta q^{\mu}+B'^{i}_{\mu}(q^{\kappa}, \dot{q}^{\lambda})\,\delta\dot{q}^{\mu}(v)=0 \quad , \quad (i=1, \ldots, k),$$

where $q^{\kappa}=q^{\kappa}(u)=q^{\kappa}(f)=q^{\kappa}(v), \quad \dot{q}^{\kappa}=\dot{q}^{\kappa}(u)=\dot{q}^{\kappa}(w), f_{\kappa}=f_{\kappa}(f),$
$p_{\kappa}=p_{\kappa}(u), \quad \dot{p}_{\kappa}=\dot{p}_{\kappa}(u), \quad \delta q^{\kappa}=\delta q^{\kappa}(w)$ and
$\delta\dot{q}^{\kappa}=\delta\dot{q}^{\kappa}(w)$.

Bilanciamento armonico e metodi variazionali classici (*)

JACOPA VACCA
Dipartimento di Matematica - Politecnico di Torino

Summary. *The purpose of the present paper is to put in relation with classical variational principles (Hamilton, Ritz, Galerkin) the method of partial harmonic balance, used when in non-linear systems approximate periodical solutions of the motion equations are searched. Holonomic systems with n degrees – of – freedom are studied, both autonomous with conservative forces and non autonomous with damping forces and forcing terms.*

Introduzione

Nello studio di vibrazioni non lineari, ammessa l'esistenza di soluzioni periodiche, ha molto interesse, soprattutto nelle applicazioni, procedere ad una determinazione approssimata di tali soluzioni.

Assai utile e pratico risulta il metodo basato sul principio del bilancio armonico [1] Cap. 6, [2] Cap. 1, [3] Cap. 2: una soluzione di prima approssimazione si ottiene considerando solo i termini di frequenza fondamentale dello sviluppo in serie di Fourier della soluzione periodica e imponendo a questi di soddisfare "in media" l'equazione differenziale del moto, nel senso che vengono bilanciati i soli termini di frequenza fondamentale e trascurati gli altri.

Scopo della presente ricerca è mettere in relazione tale metodo con i principi variazionali classici.

E' noto infatti che dai principi variazionali della Meccanica Analitica [4] Cap. 3, [5] parte 2ª Cap. 3, [6] Cap. 2 si ricavano procedimenti per la determinazione di soluzioni approssimate di equazioni differenziali non lineari.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R. e del Progetto Finalizzato Trasporti del C.N.R.

In questo lavoro considereremo un sistema olonomo a n gradi di libertà, con vincoli fissi e lisci, nei casi: 1°) autonomo soggetto a sole forze conservative, 2°) non autonomo con forze dissipative e forze dipendenti dal tempo.

Dimostreremo l'equivalenza, sotto certe condizioni, del bilanciamento armonico parziale ad altri due metodi analitici per la determinazione di soluzioni approssimate di equazioni differenziali non lineari, e cioè: il metodo di media di Ritz-Galerkin (detto anche di Galerkin) [7] Cap. 2, [8] Cap. 4, e il metodo variazionale di Rayleigh-Ritz (detto anche di Ritz) [5] parte 2ª Cap. 3, [9] parte 1ª Cap. 4, fondato sul principio di Hamilton.

1. Sistemi autonomi, con forze conservative

Consideriamo un sistema olonomo a n gradi di libertà, di cui siano q_r $(r = 1, 2, ..., n)$ le coordinate lagrangiane, soggetto a vincoli senza attrito e indipendenti dal tempo, non lineare.

Supponiamo dapprima tutte le forze attive conservative; come equazioni del moto assumiamo le equazioni di Lagrange

$$(1) \qquad -\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, ..., n)$$

le quali, essendo per le ipotesi fatte $T = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j$ con $a_{ij} = a_{ji}$ dipendenti dalle sole $q_1, q_2, ..., q_n$ e $U = U(q_1, q_2, ..., q_n)$, diventano [4] Cap. 1:

$$(2) \qquad -\sum_{1}^{n}{}_{j}\, a_{rj}\, \ddot{q}_j - \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, \frac{\partial a_{rj}}{\partial q_i}\, \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{ij}\, \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_r}\, \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial U}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, ..., n).$$

Le (2) costituiscono un sistema non lineare di n equazioni differenziali del 2° ordine, di cui cerchiamo soluzioni periodiche che in prima approssimazione abbiano forma d'onda sinusoidale:

$$(3) \qquad \tilde{q}_r(t) = q_r^* \sin \omega t \qquad (r = 1, 2, ..., n).$$

Per trovare le relazioni che legano le n ampiezze incognite q_r^* alla pulsazione ω, mediante bilanciamento armonico parziale, si sostituisce nei primi membri delle (2) alle q_r le $\tilde{q}_r(t)$, si conservano nelle espressioni ottenute solo i termini in $\sin\omega t$ e si eguagliano a zero i corrispondenti coefficienti.

Poniamo in generale:

$$E_r(t)=\left[-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}+\frac{\partial T}{\partial q_r}+\frac{\partial U}{\partial q_r}\right]_{q_r=\tilde{q}_r(t)} \qquad (r=1,2,\dots,n) \tag{4}$$

dove $\tilde{q}_r(t)$ rappresenta una generica soluzione approssimata. Se in particolare assumiamo per le $\tilde{q}_r(t)$ le espressioni (3) le n condizioni a cui si perviene coincidono con le seguenti:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} E_r(t)\sin\omega t\, dt=0 \qquad (r=1,2,\dots,n). \tag{5}$$

Ciò si dimostra immediatamente tenendo conto della ortogonalità delle funzioni $1, \cos\omega t, \sin\omega t, \cos 2\omega t, \sin 2\omega t, \dots$ nell'intervallo $\left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$.

D'altra parte se per il sistema (2) si cercano, più in generale, soluzioni approssimate del tipo $\tilde{q}_r(t)=q_r^*\phi(t)$ $(r=1,2,\dots,n)$ con $\phi(t)$ funzione assegnata periodica di periodo $\mathcal{T}$, imponendo che sia nullo il valor medio in un ciclo del lavoro virtuale delle forze d'inerzia e delle forze attive, si ottengono [10] le equazioni seguenti, atte a determinare le ampiezze incognite q_r^*:

$$\int_0^{\mathcal{T}} E_r(t)\,\phi(t)\, dt=0 \qquad (r=1,2,\dots,n). \tag{6}$$

Le (6) sono le condizioni di Ritz-Galerkin con residuo $E_r(t)$ e peso $\phi(t)$. Esse equivalgono proprio alle condizioni (5) del bilanciamento armonico parziale, qualora si scelga $\phi(t)=\sin\omega t$.

Dimostriamo ora che alle stesse condizioni (5) si perviene anche applicando il metodo di Rayleigh-Ritz, fondato sul principio di Hamilton. Come ben noto, nelle attuali ipotesi di sole forze conservative, quest'ultimo afferma che il moto naturale è caratterizzato dal fatto che, detti

t_1 e t_2 due istanti qualsiasi, è stazionario l'integrale:

$$(7) \qquad S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \quad , \qquad \text{con} \qquad L = T + U$$

rispetto a tutti i moti variati sincroni fra le stesse configurazioni estreme. Chiaramente se la classe delle funzioni ammissibili nell'integrale (7) è così ampia da contenere anche quelle corrispondenti all'effettivo moto naturale, imponendo la stazionarietà di (7) si ottiene la soluzione esatta del sistema di equazioni di Lagrange (2). Se invece la classe delle funzioni ammissibili viene limitata ad una classe particolare di soluzioni del tipo $\tilde{q}_r(t) = q_r^* \,\psi(t)$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ con $\psi(t)$ funzione assegnata periodica di periodo $\mathcal{T}$ tale che $\psi(0) = \psi(\mathcal{T}) = 0$, il metodo di Rayleigh-Ritz fornisce le soluzioni approssimate ottimali in tale classe.

Il metodo consiste nel sostituire nella (7) queste $\tilde{q}_r(t)$ alle q_r e nell'imporre la condizione:

$$(8) \qquad \delta S = 0$$

di stazionarietà di S rispetto alle variazioni delle q_r^*, cioè in questo caso:

$$(8') \qquad \frac{\partial S}{\partial q_r^*} = 0 \qquad\qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Posto $t_1 = 0$, $t_2 = \mathcal{T}$ ciò porta alle n condizioni

$$(9) \qquad \int_0^{\mathcal{T}} E_r(t)\,\psi(t)\,dt = 0 \qquad\qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

che coincidono con le (6) per $\psi(t) = \phi(t)$, e con le (5) qualora si scelga $\psi(t) = \sin \omega t$.

Per dimostrare le (9) osserviamo che risulta nel caso presente:

$$S = \int_0^{\mathcal{T}} \left[\frac{1}{2} \sum_1^n{}_{ij}\, a_{ij}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_n)\,\dot{\tilde{q}}_i \dot{\tilde{q}}_j + U(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_n) \right] dt$$

e quindi si ha:

$$\frac{\partial S}{\partial q_r^*} = \int_0^{\mathcal{T}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_r^*} \left(\sum_1^n {}_i \dot{\tilde{q}}_i \sum_1^n {}_j a_{ij} \dot{\tilde{q}}_j \right) + \frac{\partial U}{\partial \tilde{q}_r} \psi(t) \right\} dt =$$

$$= \int_0^{\mathcal{T}} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\psi}(t) \left(\sum_1^n {}_j a_{rj} \dot{\tilde{q}}_j + \sum_1^n {}_j a_{jr} \dot{\tilde{q}}_j \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2} \sum_1^n {}_{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial \tilde{q}_r} \dot{\tilde{q}}_i \dot{\tilde{q}}_j + \frac{\partial U}{\partial \tilde{q}_r} \right) \psi(t) \right\} dt =$$

$$= \int_0^{\mathcal{T}} \sum_1^n {}_j a_{rj} \dot{\tilde{q}}_j \dot{\psi}(t)\, dt + \int_0^{\mathcal{T}} \left(\frac{1}{2} \sum_1^n {}_{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial \tilde{q}_r} \dot{\tilde{q}}_i \dot{\tilde{q}}_j + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial U}{\partial \tilde{q}_r} \right) \psi(t)\, dt =$$

$$= \sum_1^n {}_j \left\{ [a_{rj} \dot{\tilde{q}}_j \psi(t)]_0^{\mathcal{T}} - \int_0^{\mathcal{T}} \left(\sum_1^n {}_i \frac{\partial a_{rj}}{\partial \tilde{q}_i} \dot{\tilde{q}}_i \dot{\tilde{q}}_j + \right. \right.$$

$$\left. \left. + a_{rj} \ddot{\tilde{q}}_j \right) \psi(t)\, dt \right\} +$$

$$+ \int_0^{\mathcal{T}} \left(\frac{1}{2} \sum_1^n {}_{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial \tilde{q}_r} \dot{\tilde{q}}_i \dot{\tilde{q}}_j + \frac{\partial U}{\partial \tilde{q}_r} \right) \psi(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{\mathcal{T}} \left\{ - \sum_1^n {}_{ij} \frac{\partial a_{rj}}{\partial \tilde{q}_i} \dot{\tilde{q}}_i \dot{\tilde{q}}_j - \sum_1^n {}_j a_{rj} \ddot{\tilde{q}}_j + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_1^n {}_{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial \tilde{q}_r} \dot{\tilde{q}}_i \dot{\tilde{q}}_j + \frac{\partial U}{\partial \tilde{q}_r} \right\} \psi(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{\mathcal{T}} E_r(t)\, \psi(t)\, dt$$

avendo integrato per parti e notato che l'incremento $[a_{rj} \dot{\tilde{q}}_j \psi(t)]_0^{\mathcal{T}}$ è nullo poiché $\psi(\mathcal{T}) = \psi(0) = 0$.

A titolo di *esempio* si consideri il bipendolo pesante (caso $n = 2$, $q_1 = \vartheta$, $q_2 = \varphi$) studiato in un precedente lavoro [10] ritenendo nelle equazioni differenziali del moto solo i termini fino al 3° ordine incluso e quindi con la funzione lagrangiana:

$$(10) \qquad L = \frac{l_1^2 m_1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3} + \mu \right) \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{3} \mu^3 \dot{\varphi}^2 + \right.$$

$$+ \mu^2 \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2} - \frac{\varphi^2}{2} + \vartheta \varphi \right) +$$

$$\left. + \sigma^2 \left[(1 + 2\mu) \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{\vartheta^4}{24} \right) + \mu^2 \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} \right) \right] \right\}$$

ove:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} = \frac{l_2}{l_1} \quad , \quad \sigma = \sqrt{\frac{g}{l_1}} \, .$$

Per determinare soluzioni approssimate della forma

$$(11) \qquad \vartheta(t) = \vartheta^* \sin \omega t \quad , \quad \varphi(t) = \varphi^* \sin \omega t$$

si è allora pervenuti, sia col bilancio armonico parziale che con il metodo di Ritz-Galerkin, alle due condizioni:

$$\mathscr{A} \equiv \left[- \left(\frac{1}{3} + \mu \right) \xi + \left(\frac{1}{2} + \mu \right) \right] \vartheta^* - \frac{1}{2} \mu^2 \xi \varphi^* -$$

$$- \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} + \mu \right) \vartheta^{*3} + \frac{3}{16} \mu^2 \xi \vartheta^{*2} \varphi^* -$$

$$- \frac{1}{4} \mu^2 \xi \vartheta^* \varphi^{*2} + \frac{1}{16} \mu^2 \xi \varphi^{*3} = 0$$

$$\mathscr{C} \equiv - \frac{1}{2} \xi \vartheta^* + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \mu \xi \right) \varphi^* + \frac{1}{16} \xi \vartheta^{*3} -$$

$$- \frac{1}{4} \xi \vartheta^{*2} \varphi^* + \frac{3}{16} \xi \vartheta^* \varphi^{*2} - \frac{1}{16} \varphi^{*3} = 0$$

ove $\xi = \dfrac{\omega^2}{\sigma^2}$ è un parametro che in questo problema può essere scelto ad arbitrio, salvo la condizione che le equazioni ora scritte ammettano soluzioni reali in ϑ^* e φ^*.

Non è difficile verificare direttamente che queste stesse condizioni si ottengono applicando il principio di Hamilton (8) con le funzioni ammissibili (11), e cioè annullando le derivate $\dfrac{\partial S}{\partial \vartheta^*}$ e $\dfrac{\partial S}{\partial \varphi^*}$. Infatti sostituendo la (10) nella (7) risulta a calcoli fatti:

$$\frac{\partial S}{\partial \vartheta^*} = - l_1^2 m_1 \frac{\pi}{\omega} \sigma^2 \mathscr{A}, \qquad \frac{\partial S}{\partial \varphi^*} = - l_1^2 m_1 \frac{\pi}{\omega} \sigma^2 \mu^2 \mathscr{C} .$$

2. Sistemi non autonomi, con forze dissipative e forze impresse sinusoidali

Consideriamo ora un sistema non autonomo soggetto, oltre che a forze conservative con potenziale U, anche a forze impresse sinusoidali, aventi tutte la stessa pulsazione ω, ed a forze dissipative.

Le equazioni di Lagrange sono:

$$(12) \qquad - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial L}{\partial q_r} + Q_r = 0 \qquad (r = 1, 2, ..., n)$$

dove $L = L(q_1, q_2, ..., q_n;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n)$ è la funzione lagrangiana

$$T + U, \text{ e } Q_r = Q_r(\omega t, q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n)$$

sono le componenti lagrangiane secondo le q_r delle forze impresse, tutte $\mathcal{T}$-periodiche rispetto a t, e delle forze dissipative.

La ricerca di soluzioni periodiche approssimate delle equazioni (12) nella forma

$$\tilde{q}_r(t) = q_r^* \sin \omega t + q_r^{**} \cos \omega t \qquad (r = 1, 2, ..., n)$$

mediante bilanciamento armonico parziale limitato ai soli termini in $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$, porta per la determinazione delle incognite q_r^* e

$\overset{**}{q_r}$ a $2n$ condizioni ovviamente equivalenti alle seguenti:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} E_r(t) \sin \omega t \, dt = 0 \, , \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} E_r(t) \cos \omega t \, dt = 0 \tag{13}$$

$(r = 1, 2, ..., n)$

avendo posto

$$E_r(t) = \left[-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial L}{\partial q_r} + Q_r \right]_{q_r = \widetilde{q}_r(t)} \tag{14}$$

$(r = 1, 2, ..., n).$

Le (13) non sono altro che le condizioni di Ritz-Galerkin:

$$\int_0^{\mathcal{T}} E_r(t) \phi_1(t) \, dt = 0, \quad \int_0^{\mathcal{T}} E_r(t) \phi_2(t) \, dt = 0 \tag{15}$$

$(r = 1, 2, ..., n)$

qualora per le (12) si cerchino soluzioni del tipo

$$\widetilde{q}_r(t) = \overset{*}{q_r} \phi_1(t) + \overset{**}{q_r} \phi_2(t) \qquad (r = 1, 2, ..., n)$$

còn funzioni peso $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ periodiche di periodo $\mathcal{T} = \dfrac{2\pi}{\omega}$, e per tali pesi si assumano $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$ rispettivamente.

Volendo, anche nelle attuali ipotesi, mettere in relazione il bilanciamento armonico parziale col principio di Hamilton conviene operare nel modo seguente, che si ispira a quanto fatto da D.E. Newland [11] nel caso $n = 2$. Precisamente partiamo dal principio di Hamilton nella forma più generale:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \sum_1^n {}_r \, Q_r \, \delta q_r) \, dt = 0 \tag{16}$$

dove:

$$\delta L = \sum_1^n {}_r \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r + \frac{\partial L}{\partial q_r} \delta q_r \right).$$

Mediante integrazione per parti abbiamo:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_1^n {}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r \, dt = \sum_1^n {}_r \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{d\, \delta q_r}{dt} dt =$$

$$= \sum_1^n {}_r \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta q_r \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta q_r \, dt \right\} =$$

$$= \sum_1^n {}_r \int_{t_1}^{t_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta q_r \, dt$$

in quanto si suppone che le δq_r si annullino per $t = t_1$ e $t = t_2$. Il principio di Hamilton assume così l'aspetto:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_1^n {}_r \left(- \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial L}{\partial q_r} + Q_r \right) \delta q_r \, dt = 0 \, . \tag{17}$$

Cerchiamo ora soluzioni approssimate delle equazioni (12) del tipo:

$$\tilde{q}_r (t) = \overset{*}{q_r} \psi_1 (t) + \overset{**}{q_r} \psi_2 (t) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \tag{18}$$

con $\psi_1 (t)$ e $\psi_2 (t)$ funzioni assegnate periodiche di periodo $\mathcal{T} = \dfrac{2\pi}{\omega}$.
Per determinare le incognite $\overset{*}{q_r}, \overset{**}{q_r}$ seguiamo il metodo di Rayleigh-Ritz che consiste nell'assumere come funzioni ammissibili le (18), da sostituire nella (17) al posto delle q_r.

Sfruttando l'arbitrarietà delle $\delta \overset{*}{q_r}, \delta \overset{**}{q_r}$ e dei tempi t_1, t_2 imponiamo che la (17) sia soddisfatta con le $2n$ scelte:

$$\begin{cases} \delta \overset{\sim(1)}{q_r} (t) = \psi_1 (t) \delta \overset{*}{q_r}, & \text{con} \quad \delta \overset{*}{q_r} \neq 0 \ , \\ \delta \overset{\sim(1)}{q_i} (t) = 0 & \text{se} \quad i \neq r \ , \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1 = t_{11} \\ t_2 = t_{11} + \mathcal{T} \end{cases}$$

con t_{11} tale che $\psi_1 (t_{11}) = 0$

e inoltre

$$\begin{cases} \delta \tilde{q}_r^{(2)}(t) = \psi_2(t)\,\delta q_r^{**} & , \text{ con } \delta q_r^{**} \neq 0\,, \\ \delta \tilde{q}_i^{(2)}(t) = 0 & \text{se } i \neq r \quad , \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1 = t_{12} \\ t_2 = t_{12} + \mathcal{T} \end{cases}$$

$$\text{con } t_{12} \text{ tale che } \psi_2(t_{12}) = 0$$

di guisa che, per ciascuna scelta, la sommatoria nella (17) si riduce ad un solo termine. Otteniamo le $2n$ condizioni:

$$(19) \qquad \int_{t_{11}}^{t_{11}+\mathcal{T}} E_r(t)\,\psi_1(t)\,dt = 0\,, \qquad \int_{t_{12}}^{t_{12}+\mathcal{T}} E_r(t)\,\psi_2(t)\,dt = 0$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n)$$

le quali equivalgono proprio alle (15) se $\psi_1(t) = \phi_1(t)$, $\psi_2(t) = \phi_2(t)$, poiché le funzioni integrande risultano $\mathcal{T}$-periodiche e quindi gli integrali estesi ad un intervallo di ampiezza eguale a un periodo non dipendono dal loro estremo inferiore.

Come *applicazione* si consideri un sistema a un grado di libertà massa - molla - smorzatore con forzante sinusoidale e non linearità cubica nella forza elastica, il cui moto soddisfa alla ben nota equazione di Duffing [2] Cap. 1, [12] Cap. 4, [13]:

$$(20) \qquad \ddot{x} + c\dot{x} + k_1 x + k_3 x^3 = f_0 \sin \omega t \,.$$

Risulta:

$$(21) \qquad \begin{cases} L = \dfrac{1}{2}\dot{x}^2 - \dfrac{k_1}{2}x^2 - \dfrac{k_3}{4}x^4 \\ \\ Q = -c\dot{x} + f_0 \sin \omega t \end{cases}$$

cosicché la (17) diventa:

$$(22) \qquad \int_{t_1}^{t_2} (-\ddot{x} - k_1 x - k_3 x^3 - c\dot{x} + f_0 \sin \omega t)\,\delta x\,dt = 0 \,.$$

Per l'equazione (20) cerchiamo soluzioni approssimate della forma:

$$(23) \qquad \tilde{x}(t) = x^* \sin \omega t + x^{**} \cos \omega t \,;$$

determiniamo le incognite x^* e x^{**} imponendo che la (22) sia soddisfatta dalla (23) con le scelte:

$$\begin{cases} \delta\widetilde{x}^{(1)} = \sin\omega t\ \delta x^* \\ t_1 = 0, \quad t_2 = \dfrac{2\pi}{\omega} \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta\widetilde{x}^{(2)} = \cos\omega t\ \delta x^{**} \\ t_1 = \dfrac{\pi}{2\omega}, \quad t_2 = \dfrac{5\pi}{2\omega} . \end{cases}$$

Si trova, a calcoli fatti:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} E(t) \sin\omega t\, dt = 0 \quad , \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} E(t) \cos\omega t\, dt = 0 \tag{24}$$

con

$$\begin{aligned} E(t) = {} & \omega^2 (x^* \sin\omega t + x^{**} \cos\omega t) - \\ & - k_1 (x^* \sin\omega t + x^{**} \cos\omega t) - k_3 (x^{*3} \sin^3\omega t + \\ & + 3x^{*2} x^{**} \sin^2 \omega t \cos\omega t + 3x^* x^{**2} \sin\omega t \cos^2\omega t + \\ & + x^{**3} \cos^3\omega t) - c\,\omega(x^* \cos\omega t - x^{**} \sin\omega t) + \\ & + f_0 \sin\omega t. \end{aligned} \tag{25}$$

Se si opera il cambiamento di variabile indipendente $\omega t = \tau$ e si utilizzano le formule trigonometriche

$$\sin^3\tau = \frac{3}{4}\sin\tau - \frac{1}{4}\sin 3\tau \quad ,$$

$$\cos^3\tau = \frac{3}{4}\cos\tau + \frac{1}{4}\cos 3\tau$$

le (24) diventano:

$$\int_0^{2\pi} \hat{E}(\tau) \sin\tau\, d\tau = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} \hat{E}(\tau) \cos\tau\, d\tau = 0 \tag{26}$$

con

$$\hat{E}(\tau) = [E(t)]_{\omega t = \tau} = \Big[(\omega^2 - k_1)x^* - \frac{3}{4} k_3 x^{*3} - \frac{3}{4} k_3 x^* x^{**2} + c\,\omega x^{**} + f_0\Big] \sin\tau + \Big[(\omega^2 - k_1)x^{**} - \frac{3}{4} k_3 x^{*2} x^{**} - \frac{3}{4} k_3 x^{**3} - c\,\omega x^*\Big] \cos\tau + \Big(\frac{1}{4} k_3 x^{*3} - \frac{3}{4} k_3 x^* x^{**2}\Big) \sin 3\tau + \Big(\frac{3}{4} k_3 x^{*2} x^{**} - \frac{1}{4} k_3 x^{**3}\Big) \cos 3\tau . \tag{27}$$

Le (26) portano infine alle seguenti condizioni:

$$\begin{cases} (k_1 - \omega^2)x^* + \dfrac{3}{4} k_3 x^* (x^{*2} + x^{**2}) - c\,\omega x^{**} = f_0 \\ (k_1 - \omega^2)x^{**} + \dfrac{3}{4} k_3 x^{**} (x^{*2} + x^{**2}) + c\,\omega x^* = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Quando si assumono funzioni ammissibili sinusoidali, può interessare la seguente *osservazione*, che ci limitiamo a sviluppare per l'equazione di Duffing (20).

In luogo della (23) si ponga:

$$\tilde{x}(t) = A \sin(\omega t - \vartheta) . \tag{29}$$

Per determinare le incognite A e ϑ imponiamo che $\tilde{x}(t)$ soddisfi alla (22) con le scelte:

$$\begin{cases} \delta\tilde{x}^{(1)} = \sin(\omega t - \vartheta)\,\delta A \\ t_1 = \dfrac{\vartheta}{\omega}\,,\ t_2 = \dfrac{\vartheta + 2\pi}{\omega} \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta\tilde{x}^{(2)} = -A \cos(\omega t - \vartheta)\,\delta\vartheta \\ t_1 = \dfrac{\pi + 2\vartheta}{2\omega}\,,\ t_2 = \dfrac{5\pi + 2\vartheta}{2\omega} \end{cases} .$$

Notiamo che i tempi t_1 e t_2 assunti sono costanti rispetto a δA e $\delta\vartheta$, ma dipendono dalla ϑ incognita.

Otteniamo, operando il cambiamento $\omega t - \vartheta = \tau$:

$$\int_0^{2\pi} \widetilde{E}(\tau) \sin \tau \, d\tau = 0 \ , \quad \int_0^{2\pi} \widetilde{E}(\tau) \cos \tau \, d\tau = 0 \tag{30}$$

ove:

$$\widetilde{E}(\tau) = \left[(\omega^2 - k_1) A - \frac{3}{4} k_3 A^3 + f_0 \cos \vartheta \right] \sin \tau + \tag{31}$$
$$+ (-c\omega A + f_0 \sin \vartheta) \cos \tau + \frac{1}{4} k_3 A^3 \sin 3\tau \ .$$

Con calcoli immediati le (30) danno le ben note formule risolutive di 1ª approssimazione [12]:

$$\begin{cases} (\omega^2 - k_1) A - \dfrac{3}{4} k_3 A^3 + f_0 \cos \vartheta = 0 \\ -c\omega A + f_0 \sin \vartheta = 0 \ . \end{cases} \tag{32}$$

Dal confronto della (23) con la (29) segue $x^* = A \cos \vartheta$, $x^{**} = -A \sin \vartheta$ per cui le condizioni (28) si possono scrivere:

$$\begin{cases} -(k_1 - \omega^2) A \cos \vartheta - \dfrac{3}{4} k_3 A^3 \cos \vartheta - c\omega A \sin \vartheta + f_0 = 0 \\ (k_1 - \omega^2) A \sin \vartheta + \dfrac{3}{4} k_3 A^3 \sin \vartheta - c\omega A \cos \vartheta = 0 \ . \end{cases} \tag{33}$$

E' facile verificare che opportune combinazioni lineari delle equazioni (33) coincidono proprio con le (32).

Conclusione

In definitiva si può concludere che la ricerca di soluzioni approssimate periodiche armoniche delle equazioni del moto di sistemi non lineari

(autonomi o no, senza o con dissipazione), mediante bilanciamento armonico parziale, a) equivale a utilizzare il metodo di Galerkin con funzioni peso sinusoidali; b) equivale pure, qualora le equazioni del moto siano quelle di Lagrange, ad applicare l'equazione variazionale che esprime il principio di Hamilton, assumendo funzioni ammissibili sinusoidali e tempi t_1, t_2 opportuni, secondo la tecnica del metodo di Rayleigh-Ritz.

BIBLIOGRAFIA

[1] Cunningham W.J. - *Introduction to non linear analysis*, Mc Graw-Hill, New York, 1958.

[2] Hayashi C. - *Non linear oscillations in physical systems,* Mc Graw-Hill, New York, 1964.

[3] Nayfeh A.H., Mook D.T. - *Non linear oscillations,* John Wiley & Sons, New York, 1979.

[4] Agostinelli C. - *Lezioni di meccanica superiore,* ed. V. Giorgio, Torino, 1948.

[5] Ferrari C., Romiti A. - *Meccanica applicata alle macchine, U.T.E.T., Torino, 1966.*

[6] Meirovitch L. - *Methods of analytical dynamics.* Mc Graw-Hill, New York, 1970.

[7] Timoshenko S., Young D.H., Weaver W. Jr. - *Vibrations problems in engineering,* J. Wiley, New York, 1974.

[8] Harris C.M., Crede C.E. - *Shock and Vibration Handbook,* Mc Graw-Hill, New York, 1961.

[9] KRALL G. - *Meccanica tecnica delle vibrazioni*, Veschi, Roma, 1970.

[10] MORONI P., SARRA M. †, VACCA J. - *Vibrazioni libere non lineari di un bipendolo,* Atti della Accademia delle Scienze di Torino, vol. 118, 1984.

[11] NEWLAND D.E. - *On the methods of Galerkin, Ritz and Krylov - Bogoliubov in the theory of non linear vibrations,* Int. J. Mech. Sci., Vol. 7, 1965.

[12] STOKER J.J. - *Non linear vibrations*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1950.

[13] NOCILLA S. - *Vibrations, Stability and General Solution for the Duffing and other non linear equations,* Meccanica, ed. Pitagora, Bologna, 1980.

Soluzioni stazionarie delle equazioni del moto di sistemi anolonomi (*)

MARIA TERESA VACCA
Dipartimento di Matematica - Politecnico di Torino

Summary. *The motion of a dynamical system with non-holonomic time-independent constraints is considered in this paper. A form of the dynamical equations is deduced that is equivalent to the dynamical equations of a suitable holonomic system having, as particularized integrals, the non-holonomic conditions. Moreover a method to obtain stationary solutions, i.e. which makes the total energy stationary subordinately to invariant relations, is also indicated and applied to the problem of a heavy gyroscopically structured sphere wich rolls without sliding on a horizontal plane.*

1. Soluzioni stazionarie delle equazioni del moto di un sistema soggetto a vincoli anolonomi indipendenti dal tempo

Consideriamo un sistema dinamico con vincoli bilaterali e privi di attrito, indipendenti dal tempo, la cui configurazione in ogni istante sia individuata da n parametri lagrangiani $q_1, q_2 \ldots, q_n$ ed indichiamo con

$$(1.1) \qquad T = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, \dot{q}_r\, \dot{q}_s$$

la sua energia cinetica. E' noto come il movimento di tale sistema si può rappresentare mediante il movimento di un punto immagine $Q(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, di massa unitaria, sopra la varietà metrica V_n il cui quadrato dell'elemento lineare è

$$(1.2) \qquad ds^2 = 2\, T\, dt^2 = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, dq_r\, dq_s\ .$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

La velocità del punto Q è

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_{1}^{n}{}_r \frac{\partial Q}{\partial q_r} \dot{q}_r \,, \tag{1.3}$$

dove i vettori $\dfrac{\partial Q}{\partial q_r}$ sono tangenti alle linee coordinate della varietà V_n uscenti dal punto Q e risulta

$$\frac{\partial Q}{\partial q_r} \times \frac{\partial Q}{\partial q_s} = a_{rs} \,, \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.4}$$

Inoltre le componenti tangenziali alla V_n dei gradienti delle coordinate, che indichiamo con grad q_r, sono vettori ortogonali alle corrispondenti ipersuperficie coordinate $q_r = \text{cost.}$ e si ha

$$\text{grad } q_r \times \text{grad } q_s = a^{rs} \,, \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n) \,, \tag{1.5}$$

dove a^{rs} è l'elemento reciproco di a_{rs} nel determinante di questi coefficienti.

Per le (1.3), (1.4) e per la (1.1) risulta che l'energia cinetica del punto immagine $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dQ}{dt}\right)^2$ coincide con quella del sistema.

Supponiamo che il sistema dinamico considerato sia soggetto a $m \; (m < n)$ vincoli di mobilità anolonomi, indipendenti dal tempo, espressi da m relazioni, linearmente indipendenti, della forma

$$\sum_{1}^{n}{}_r \, b_{kr} \dot{q}_r = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{1.6}$$

dove le b_{kr} sono date funzioni delle coordinate lagrangiane $q_1, \ldots, q_n$ e si possono considerare come componenti covarianti $b_{kr} = \vec{b}_k \times \dfrac{\partial Q}{\partial q_r}$ degli m vettori $\vec{b}_k$ tangenti alla varietà metrica V_n nel punto Q.

Se il sistema è soggetto a forze di componenti lagrangiane Q_r, supponiamo che il punto Q sia sollecitato da una forza F tale che

$$\vec{F} \times \frac{\partial Q}{\partial q_r} = Q_r \,, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Pertanto in base alla rappresentazione indicata l'equazione simbolica della dinamica del sistema assume la forma

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - \vec{F}\right) \times \delta Q = 0 ,$$

dove lo spostamento virtuale δQ è dato da

$$\delta Q = \sum_{1}^{n}{}_r \frac{\partial Q}{\partial q_r} \delta q_r .$$

C. Agostinelli [1], applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ha stabilito la seguente forma vettoriale sintetica delle equazioni del moto del sistema anolonomo considerato:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = \vec{F} - \sum_{1}^{m}{}_{hk} B^{hk} \left(\vec{F} \times \vec{b}_k + \frac{d\vec{b}_k}{dt} \times \frac{dQ}{dt} \right) \vec{b}_h ,$$

dove B^{hk} indica l'elemento reciproco di B_{hk} nel determinante di ordine m formato con gli elementi B_{hk} così definiti

$$B_{hk} = \vec{b}_h \times \vec{b}_k = \sum_{1}^{n}{}_{rs} a^{rs} b_{hr} b_{ks} = \sum_{1}^{n}{}_r b_{hr} b_k^r , \tag{1.7}$$

avendo introdotto le componenti controvarianti dei vettori $\vec{b}_k : \vec{b}_k^r = \vec{b}_k \times \text{grad}\, q_r = \sum_{1}^{n}{}_s b_{ks} a^{rs}$.

Tale determinante è certamente non nullo poiché i vettori $\vec{b}_h$ sono linearmente indipendenti.

C. Agostinelli [2] ha dimostrato che ogni sistema anolonomo, con vincoli comunque variabili col tempo, purché bilaterali e privi di attrito, è riducibile a un sistema olonomo con n gradi di libertà, sollecitato, oltre alla sollecitazione ordinaria, da opportune forze funzioni quadratiche delle velocità lagrangiane, dipendenti dalle condizioni di anolonomia.

Inoltre Egli ha trovato che i primi membri delle equazioni dei vincoli anolonomi uguagliati a costante costituiscono degli integrali primi delle equazioni del moto del sistema stesso. Fra gli infiniti movimenti possibi-

li di detto sistema olonomo, quelli del sistema anolonomo corrispondente sono caratterizzati dall'annullare le costanti di quegli integrali.

Nel caso in cui le forze agenti sul sistema derivano da un potenziale $U(q_1, q_2, ..., q_n, t)$, essendo $Q_r = \frac{\partial U}{\partial q_r}$, C. Agostinelli ha espresso le equazioni del moto in forma canonica ponendo $L = T + U$, introducendo i momenti

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}, \qquad (r = 1, 2, ..., n) \tag{1.8}$$

e considerando la funzione caratteristica

$$H = \sum_{1}^{n}{}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r - L = \sum_{1}^{n}{}_r p_r \dot{q}_r - L, \tag{1.9}$$

dove H si intende espressa in funzione delle q, delle p e di t, ricavando dalle (1.8) le $\dot{q}$ in funzione delle q, delle p e di t. Nel nostro caso, in cui tutti i vincoli sono per ipotesi indipendenti dal tempo, dalla (1.1) si ha

$$p_r = \sum_{1}^{n}{}_s a_{rs} \dot{q}_s \tag{1.10}$$

da cui si deduce

$$\dot{q}_s = \sum_{1}^{n}{}_r a^{rs} p_r . \tag{1.11}$$

Poiché T è una forma quadratica omogenea nelle $\dot{q}$, per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee risulta

$$\begin{aligned} H = T - U &= \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_s \dot{q}_s \sum_{1}^{n}{}_r a_{rs} \dot{q}_r - U = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{rs} a^{rs} p_r p_s - U . \end{aligned} \tag{1.12}$$

Le equazioni del moto (cfr. le (28) di [2]) diventano

$$(1.13)\quad \begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{1}^{m}{}_{hk} B^{hk} b_{hi} \sum_{1}^{n}{}_{r} \left(\dfrac{db_k^r}{dt} p_r - b_k^r \dfrac{\partial H}{\partial q_r} \right) \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

ove

$$\frac{d}{dt} = \sum_{1}^{n}{}_{s} \dot{q}_s \frac{\partial}{\partial q_s} = \sum_{1}^{n}{}_{su} a^{su} p_u \frac{\partial}{\partial q_s} .$$

Le (1.13) sono, sotto forma canonica normale, un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine nelle $2n$ funzioni incognite del tempo: $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$. Esse ammettono m integrali primi lineari nei momenti. Infatti moltiplicando ambo i membri della (1.13_2) per b_j^i e sommando rispetto all'indice i da 1 a n si ottiene

$$\sum_{1}^{n}{}_{i} \left(\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) b_j^i = -$$

$$- \sum_{1}^{m}{}_{hk} B^{hk} \sum_{1}^{n}{}_{r} \left(\frac{db_k^r}{dt} p_r - b_k^r \frac{\partial H}{\partial q_r} \right) \sum_{1}^{n}{}_{i} b_{hi} b_j^i .$$

Essendo

$$\sum_{1}^{n}{}_{i} b_{hi} b_j^i = \vec{b}_h \times \vec{b}_j = B_{hj}$$

e

$$\sum_{1}^{m}{}_{h} B^{hk} \sum_{1}^{n}{}_{i} b_{hi} b_j^i = \sum_{1}^{m}{}_{h} B^{hk} B_{hj} = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad k = j \\ 0 & \text{per} \quad k \neq j \end{cases}$$

risulta dopo una semplificazione

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{1}^{n}{}_{i} b_j^i p_i \right\} = 0 , \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) ,$$

da cui seguono gli m integrali

$$(1.14)\qquad \sum_{1}^{n}{}_{i} b_j^i p_i = c_j , \quad \text{(costante)}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) ,$$

che per la (1.10) si possono scrivere

$$\sum_{1}^{n}{}_i\, b_j^i \sum_{1}^{n}{}_r\, a_{ir}\, \dot{q}_r = c_j$$

e quindi

$$\sum_{1}^{n}{}_r\, b_{jr}\, \dot{q}_r = c_j \ , \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \ ,$$

ove i primi membri coincidono coi primi membri delle (1.6).

Pertanto gli m integrali particolarizzati, ottenuti dalle (1.14) annullando le c_j, ossia

$$(1.15) \qquad f_j \equiv \sum_{1}^{n}{}_i\, b_j^i\, p_i = 0 \ , \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \ ,$$

sono proprio le equazioni dei vincoli anolonomi e costituiscono delle relazioni invarianti per il sistema di equazioni (1.13). Poiché le (1.15) sono m equazioni, lineari nei momenti p_i, possiamo ricavare m di questi momenti in funzione dei rimanenti n-m. Supposto che il determinante

$$(1.16) \qquad \beta = \begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \ldots & b_1^m \\ b_2^1 & b_2^2 & \ldots & b_2^m \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ b_m^1 & b_m^2 & \ldots & b_m^m \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero, dalle (1.15) otteniamo

$$(1.17) \qquad p_h = -\sum_{1}^{m}{}_j\, \beta_h^j \sum_{1}^{n-m}{}_r\, b_j^{m+r}\, p_{m+r} \ , \qquad (h = 1, 2, \ldots, m) \ ,$$

ove β_h^j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ è l'elemento reciproco di b_j^h nel determinante (1.16).

Ponendo

$$\sum_{1}^{m}{}_j\, \beta_h^j\, b_j^{m+r} = \gamma_h^{m+r} \ , \qquad (h = 1, 2, \ldots, m\, ;\ r = 1, 2, \ldots, n-m),$$

le (1.17) diventano

$$(1.18) \qquad p_h = -\sum_{1}^{n-m}{}_r\, \gamma_h^{m+r}\, p_{m+r} \ , \qquad (h = 1, 2, \ldots, m) \ .$$

Inoltre, essendo i vincoli indipendenti dal tempo, per il sistema (1.13) sussiste l'integrale primo dell'energia $H =$ costante. Infatti se moltiplichiamo per $\dot{q}_i$ ambo i membri della (1.13_2), sommiamo rispetto all'indice i, avendo riguardo alle (1.13_1) ed alle equazioni dei vincoli anolonomi, otteniamo

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{1}^{n}{}_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \right) = 0.$$

Cerchiamo ora le soluzioni stazionarie del sistema (1.13), cioè quelle che rendono stazionaria l'energia totale H subordinatamente alle m relazioni invarianti (1.15).

Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange [3] associamo alle (1.15) l'equazione simbolica

$$(1.19) \qquad \delta H + \sum_{1}^{m}{}_j \mu_j \, \delta f_j = 0 \ ,$$

ove δH e δf_j indicano variazioni virtuali e μ_j sono i moltiplicatori che vanno considerati come incognite ausiliarie. Uguagliando a zero i coefficienti degli incrementi virtuali δq_i e δp_i la (1.19) dà luogo alle $2n$ equazioni:

$$(1.20) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{1}^{m}{}_j \mu_j \sum_{1}^{n}{}_r \dfrac{\partial b_j^r}{\partial q_i} p_r = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{1}^{m}{}_j \mu_j \, b_j^i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \,. \end{cases}$$

Dalle prime m delle equazioni (1.20_2) possiamo ricavare i moltiplicatori μ_j osservando che il determinante dei coefficienti è dato dalla (1.16) scambiando le righe con le colonne.

Abbiamo perciò

$$\mu_h = - \sum_{1}^{m}{}_i \beta_i^h \frac{\partial H}{\partial p_i} \ , \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

e sostituendo nelle rimanenti $2n - m$ equazioni (1.20) otteniamo

$$(1.20') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial q_i} - \overset{m}{\underset{1}{\Sigma_h}} \left(\overset{m}{\underset{1}{\Sigma_k}} \beta^h_k \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \right) \overset{n}{\underset{1}{\Sigma_r}} \dfrac{\partial b^r_h}{\partial q_i} p_r = 0, \ (i=1,2,\dots,n), \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_{m+j}} - \overset{m}{\underset{1}{\Sigma_h}} b^{m+j}_h \overset{m}{\underset{1}{\Sigma_k}} \beta^h_k \dfrac{\partial H}{\partial p_k} = 0, \qquad (j=1,2,\dots,n-m). \end{cases}$$

Osserviamo che risulta

$$\overset{m}{\underset{1}{\Sigma_h}} \beta^h_k \overset{n}{\underset{1}{\Sigma_r}} \frac{\partial b^r_h}{\partial q_i} p_r = \overset{n}{\underset{1}{\Sigma_r}} p_r \overset{m}{\underset{1}{\Sigma_h}} \left(\frac{\partial (\beta^h_k b^r_h)}{\partial q_i} - b^r_h \frac{\partial \beta^h_k}{\partial q_i} \right) =$$

$$= \overset{n}{\underset{1}{\Sigma_r}} p_r \frac{\partial}{\partial q_i} \overset{m}{\underset{1}{\Sigma_h}} b^r_h \beta^h_k - \overset{m}{\underset{1}{\Sigma_h}} \frac{\partial \beta^h_k}{\partial q_i} \overset{n}{\underset{1}{\Sigma_r}} b^r_h p_r =$$

$$= \overset{n-m}{\underset{1}{\Sigma_j}} p_{m+j} \frac{\partial \gamma^{m+j}_k}{\partial q_i}$$

avendo tenuto conto delle (1.15), essendo per $r=1,2,\dots,m$; $k=1,2,\dots,m$,

$$\overset{m}{\underset{1}{\Sigma_h}} b^r_h \beta^h_k = \begin{cases} 1 & \text{per } k=r \\ 0 & \text{per } k \neq r \end{cases}$$

ed avendo posto

$$\overset{m}{\underset{1}{\Sigma_h}} b^{m+j}_h \beta^h_k = \gamma^{m+j}_k \quad , \quad (j=1,2,\dots,n-m), (k=1,2,\dots,m).$$

Pertanto le (1.20') diventano

$$(1.21) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial q_i} - \overset{m}{\underset{1}{\Sigma_k}} \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \overset{n-m}{\underset{1}{\Sigma_j}} p_{m+j} \dfrac{\partial \gamma^{m+j}_k}{\partial q_i} = 0, \ (i=1,2,\dots,n), \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_{m+j}} - \overset{m}{\underset{1}{\Sigma_k}} \gamma^{m+j}_k \dfrac{\partial H}{\partial p_k} = 0, \qquad (j=1,2,\dots,n-m), \end{cases}$$

e costituiscono le condizioni di stazionarietà per la funzione ridotta $\overline{H}$ che si può ottenere dalla H eliminando le $p_1, \dots, p_m$ per mezzo delle (1.18), in quanto i primi membri delle (1.21) sono proprio le derivate

di questa $\bar{H}(q_1, ..., q_n; p_{m+1}, ..., p_n)$, espresse mediante le derivate della originaria H.

Le (1.21), tenendo conto della (1.12), assumono la forma

$$
(1.21') \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, p_r p_s \frac{\partial a^{rs}}{\partial q_i} - \sum_{1}^{n}{}_{r}\, p_r \sum_{1}^{m}{}_{k}\, a^{rk} \sum_{1}^{n-m}{}_{j}\, p_{m+j} \frac{\partial \gamma_k^{m+j}}{\partial q_i} = \\ \qquad\qquad = \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i=1,2,...,n) \\ \sum_{1}^{n}{}_{r} \left(a^{r\, m+j} - \sum_{1}^{m}{}_{k}\, \gamma_k^{m+j}\, a^{rk} \right) p_r = 0, \quad (j=1,2,...,n-m). \end{cases}
$$

Osserviamo che le n equazioni $(1.21'_1)$ non sono omogenee nelle n incognite p_r, mentre lo sono le $n-m$ equazioni $(1.21'_2)$ e le m equazioni (1.15). Pertanto il sistema di n equazioni lineari omogenee nelle n incognite p_r, formato dalle equazioni (1.15) associate alle $(1.21'_2)$, deve avere identicamente nullo il determinante di ordine n dei suoi coefficienti. Tale sistema si può scrivere nella forma

$$
(1.22) \begin{cases} \sum_{1}^{n}{}_{r}\, b_h^r\, p_r = 0 & (h=1,2,...,m), \\ \sum_{1}^{n}{}_{r}\, d_{m+j}^r\, p_r = 0 & (j=1,2,...,n-m), \end{cases}
$$

avendo posto

$$
d_{m+j}^r = a^{r\, m+j} - \sum_{1}^{n}{}_{k}\, \gamma_k^{m+j}\, a^{rk} \quad .
$$

Supponiamo che la matrice dei coefficienti di questo sistema abbia caratteristica ν con $m < \nu < n$. Allora ν dei momenti p_r si possono ricavare in funzione dei rimanenti. Nell'ipotesi che sia diverso da zero il determinante di ordine ν formato dai primi ν coefficienti di ciascuna delle prime ν equazioni del sistema e indicando rispettivamente con $\bar{\beta}_r^h$ l'elemento reciproco di b_h^r e con δ_r^{m+j} l'elemento reciproco di d_{m+j}^r in questo determinante otteniamo

$$
p_r = - \sum_{1}^{n-\nu}{}_{i} \left(\sum_{1}^{m}{}_{h}\, \bar{\beta}_r^h\, b_h^{\nu+i} + \sum_{1}^{\nu-m}{}_{j}\, \delta_r^{m+j}\, d_{m+j}^{\nu+i} \right) p_{\nu+i}, \qquad (r=1,2,...,\nu),
$$

ossia

$$(1.23) \qquad p_r = - \sum_{1}^{n-\nu}{}_i \ \bar{\gamma}_r^{\nu+i} \ p_{\nu+i} \ , \qquad (r = 1, 2, \ldots, \nu)$$

con

$$\bar{\gamma}_r^{\nu+i} = \sum_{1}^{m}{}_h \ \bar{\beta}_r^h \ b_h^{\nu+i} + \sum_{1}^{\nu-m}{}_j \ \delta_r^{m+j} \ d_{m+j}^{\nu+i} \ .$$

Se inoltre supponiamo che $n - \nu$ fra le n equazioni $(1.21'_1)$ siano risolubili rispetto a $p_{\nu+i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n - \nu)$, queste equazioni e le (1.22) permettono di esprimere tutti i momenti p_r in termini di $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Le prime n equazioni (1.13) ossia

$$\frac{dq_i}{dt} = \sum_{1}^{n}{}_r \ a^{ri} \ p_r, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \ ,$$

costituiscono pertanto un sistema di n equazioni differenziali ordinarie del 1° ordine nelle incognite $q_1, \ldots, q_n$.

Quindi per integrazione di esso si ottengono $q_1(t), \ldots q_n(t)$ e successivamente tutti i momenti p_r in funzione di t.

Se poi il sistema (1.13) ammette altri integrali primi, oltre a quelli espressi dalla (1.14), si possono cercare le soluzioni che rendono stazionaria l'energia totale H, subordinatamente sia alle relazioni invarianti (1.15) che a questi integrali primi, applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

2. Applicazione ad una sfera pesante, a struttura giroscopica rispetto a un diametro, che rotola senza strisciare su un piano orizzontale.

Consideriamo una sfera pesante che rotola senza strisciare su un piano orizzontale nell'ipotesi che essa, pur avendo il suo baricentro coincidente col centro geometrico 0, sia a struttura dissimmetrica rispetto a questo punto ed a struttura giroscopica rispetto a un diametro. Sia a il raggio della sfera di massa m, M il punto di essa che istante per istante si porta in contatto col piano orizzontale (ξ, η) su cui rotola, $\vec{\chi}$ il versore della verticale ascendente, $\vec{\omega}$ la velocità angolare di rotazione della sfera. La condizione di puro rotolamento è

$$(2.1) \qquad \frac{dM}{dt} \equiv \frac{dO}{dt} - \vec{\omega} \wedge a \ \vec{\chi} = 0 \ .$$

Con riferimento ad una terna fissa di assi cartesiani ortogonali $\Omega\,(\xi, \eta, \zeta)$ con l'origine in un punto Ω del piano su cui rotola la sfera e con l'asse ζ verticale verso l'alto, indichiamo con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le componenti del vettore $\vec{\omega}$, con ξ, η, le coordinate orizzontali del centro O della sfera. Sia inoltre $O\,(x\,y\,z)$ la terna di assi principali d'inerzia rispetto al punto O e siano A, B, C i corrispondenti momenti principali di inerzia della sfera. Nell'ipotesi che la sfera sia a struttura giroscopica rispetto ad un diametro e sia esso quello scelto come asse z, risulta $A = B$.

Indichiamo con p, q, r le componenti di $\vec{\omega}$ secondo gli assi x, y, z, di versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ e con ϑ, φ, ψ gli angoli di Eulero. Osserviamo che sussistono le relazioni seguenti [4]

$$
(2.2)\qquad \begin{cases} p = \dot{\psi} \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi \\ q = \dot{\psi} \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \operatorname{sen} \varphi \\ r = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \end{cases}
$$

$$
(2.3)\qquad \begin{cases} \omega_1 = \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \psi \\ \omega_2 = \dot{\vartheta} \operatorname{sen} \psi - \dot{\varphi} \operatorname{sen} \vartheta \cos \psi \\ \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{cases}
$$

nelle quali il punto sovrapposto rappresenta la derivazione rispetto al tempo.

Si ha

$$
(2.4)\qquad T = \frac{1}{2}\, m \left(\frac{dO}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\,[A\,(p^2 + q^2) + C r^2],
$$

$$
U = -\, mga = \text{costante} \;.
$$

Dalla (2.1) si deducono le equazioni scalari

$$
(2.1')\qquad \dot{\xi} = a\,\omega_2 \quad , \quad \dot{\eta} = -\,a\,\omega_1
$$

e quindi ricordando le (2.3) si ottengono le equazioni dei vincoli anolonomi

$$
(2.5)\qquad \begin{cases} \dot{\xi} - a\,(\dot{\vartheta} \operatorname{sen} \psi - \dot{\varphi} \operatorname{sen} \vartheta \cos \psi) = 0 \\ \dot{\eta} + a\,(\dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \psi) = 0. \end{cases}
$$

Ci proponiamo ora di scrivere, sotto forma canonica, le equazioni del moto della sfera considerata, applicando le (1.13).

Poniamo

$$q_1 = \xi, \quad q_2 = \eta, \quad q_3 = \vartheta, \quad q_4 = \varphi, \quad q_5 = \psi$$

e tenendo conto delle (2.2) e (2.4) introduciamo i momenti

$$p_\xi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m\dot{\xi} \; ; \; p_\eta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} = m\dot{\eta} \; ;$$

$$p_\vartheta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = A \, (p \cos\varphi - q \operatorname{sen}\varphi);$$

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = Cr \; ;$$

$$p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = A \, (p \operatorname{sen}\varphi + q \cos\varphi) \operatorname{sen}\vartheta + Cr \cos\vartheta \, .$$

Risulta

$$A \, (p \cos\varphi - q \operatorname{sen}\varphi) = p_\vartheta \; ; \tag{2.6}$$

$$A \, (p \operatorname{sen}\varphi + q \cos\varphi) = \frac{p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}$$

e quindi

$$A^2 \, (p^2 + q^2) = p_\vartheta^2 + \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta)^2}{\operatorname{sen}^2 \vartheta}$$

per cui possiamo scrivere l'energia cinetica T in forma canonica

$$(T) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{m} (p_\xi^2 + p_\eta^2) + \frac{1}{A} \left[p_\vartheta^2 + \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta)^2}{\operatorname{sen}^2 \vartheta} \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{C} p_\varphi^2 \right\} . \tag{2.4'}$$

La funzione caratteristica $H = (T) - U$ ponendo $\epsilon = \dfrac{C - A}{A}$ diventa

$$(2.7)\qquad H=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{m}(p_\xi^2+p_\eta^2)+\frac{1}{A}p_\vartheta^2+\left(\frac{1}{A\,\mathrm{sen}^2\vartheta}-\frac{\epsilon}{C}\right)p_\varphi^2-\right.$$

$$\left.-\frac{2\cos\vartheta}{A\,\mathrm{sen}^2\vartheta}p_\varphi\,p_\psi+\frac{p_\psi^2}{A\,\mathrm{sen}^2\vartheta}\right\}+mga\,.$$

Dal confronto delle equazioni dei vincoli (2.5) con le (1.6) abbiamo

$$(2.8)\qquad \begin{array}{l} b_{11}=1,\ b_{12}=0,\ b_{13}=-a\,\mathrm{sen}\,\psi,\ b_{14}=a\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\psi,\\ b_{15}=0,\\ b_{21}=0,\ b_{22}=1,\ b_{23}=a\cos\psi,\ b_{24}=a\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\psi,\ b_{25}=0 \end{array}$$

ed essendo

$$b_k^r=\vec{b}_k\times\mathrm{grad}\,q_r=\sum_{1}^{5}{}_s\,b_{ks}\,a^{rs}\ ,$$

ove a^{rs} sono i coefficienti dei momenti nell'espressione di (T), troviamo

$$(2.9)\qquad \begin{array}{l} b_1^1=\dfrac{1}{m},\ b_1^2=0,\ b_1^3=\dfrac{-a\,\mathrm{sen}\,\psi}{A}\ ,\\ b_1^4=a\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\psi\left(\dfrac{1}{A\,\mathrm{sen}^2\vartheta}-\dfrac{\epsilon}{C}\right)\ ,\\ b_1^5=\dfrac{-a\cos\vartheta\cos\psi}{A\,\mathrm{sen}\,\vartheta}\ ,\\ b_2^1=0,\ b_2^2=\dfrac{1}{m}\ \ b_2^3=\dfrac{a\cos\psi}{A}\ ,\\ b_2^4=a\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\psi\left(\dfrac{1}{A\,\mathrm{sen}^2\vartheta}-\dfrac{\epsilon}{C}\right)\ ,\\ b_2^5=\dfrac{-a\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\psi}{A\,\mathrm{sen}\,\vartheta}\,. \end{array}$$

Inoltre dalla (1.7) otteniamo

$$B_{11}=\sum_{1}^{5}{}_r\,b_{1r}\,b_1^r=\frac{1}{m}+\frac{a^2}{A}-\frac{\epsilon}{C}a^2\,\mathrm{sen}^2\vartheta\cos^2\psi=$$

$$=\frac{A_1}{Am}-\frac{a^2\,\epsilon\,\mathrm{sen}^2\vartheta\cos^2\psi}{C}$$

$$B_{22} = \sum_1^5{}_r\, b_{2r}\, b_2^r = \frac{1}{m} + \frac{a^2}{A} - \frac{\epsilon}{C}\, a^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta \operatorname{sen}^2 \psi =$$

$$= \frac{A_1}{Am} - \frac{a^2\, \epsilon \operatorname{sen}^2 \vartheta \operatorname{sen}^2 \psi}{C}$$

$$B_{12} = \sum_1^5{}_r\, b_{1r}\, b_2^r = - \frac{a^2\, \epsilon \operatorname{sen}^2 \vartheta \operatorname{sen} \psi \cos \psi}{C} = B_{21}$$

con $A_1 = A + m a^2$ e quindi

$$B_{11}\, B_{22} - B_{12}^2 = \frac{A_1^2}{A^2 m^2} - \frac{A_1\, a^2\, \epsilon \operatorname{sen}^2 \vartheta}{A m C} =$$

$$= \frac{A_1}{A^2 m^2 C} \left[C A_1 - A m a^2\, \epsilon \operatorname{sen}^2 \vartheta \right] =$$

$$= \frac{1}{A^2 m^2 C}\, \Delta(\vartheta)\,,$$

avendo posto

$$\Delta(\vartheta) = A_1 \left[C A_1 - A m a^2\, \epsilon \operatorname{sen}^2 \vartheta \right] =$$

$$= A_1 \left[CA + C m a^2 - m a^2 (C - A) \operatorname{sen}^2 \vartheta \right] =$$

$$= A_1 \left[CA + m a^2 (C \cos^2 \vartheta + A \operatorname{sen}^2 \vartheta) \right] \neq 0\,.$$

Pertanto troviamo

$$B^{11} = \frac{B_{22}}{\Delta(\vartheta)}\, A^2 m^2 C = \frac{Am(CA_1 - A m a^2\, \epsilon \operatorname{sen}^2 \vartheta \operatorname{sen}^2 \psi)}{A_1\, (CA_1 - A m a^2\, \epsilon \operatorname{sen}^2 \vartheta)}$$

$$B^{22} = \frac{B_{11}}{\Delta(\vartheta)}\, A^2 m^2 C = \frac{Am(CA_1 - A m a^2\, \epsilon \operatorname{sen}^2 \vartheta \cos^2 \psi)}{A_1\, (CA_1 - A m a^2\, \epsilon \operatorname{sen}^2 \vartheta)}$$

$$B^{12} = \frac{-B_{12}}{\Delta(\vartheta)}\, A^2 m^2 C = \frac{A^2 m^2 a^2\, \epsilon \operatorname{sen}^2 \vartheta \operatorname{sen} \psi \cos \psi}{A_1\, (CA_1 - A m a^2\, \epsilon \operatorname{sen}^2 \vartheta)} = B^{21}.$$

Per dedurre sotto forma canonica le equazioni del moto della sfera dobbiamo calcolare due sommatorie che compaiono nel secondo membro della (1.13_2). Tenendo presente che dalle (2.2) e (2.6) si ottiene $\dot{\vartheta} = \dfrac{p_\vartheta}{A}$, $\dot{\psi} = \dfrac{p_\psi - p_\varphi \cos \vartheta}{A \operatorname{sen}^2 \vartheta}$ e ricordando la (2.7) dopo facili calcoli

e semplificazioni risulta

$$\sum_1^5{}_r \left(\frac{d b_1^r}{dt} p_r - b_1^r \frac{\partial H}{\partial q_r} \right) = \frac{d b_1^3}{dt} p_\vartheta + \frac{d b_1^4}{dt} p_\varphi + \frac{d b_1^5}{dt} p_\psi - b_1^3 \frac{\partial H}{\partial \vartheta} =$$

$$= - \frac{\epsilon a}{CA} \left[\cos\vartheta \cos\psi \, p_\vartheta \, p_\varphi - \frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\vartheta} (p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta) \, p_\varphi \right],$$

$$\sum_1^5{}_r \left(\frac{d b_2^r}{dt} p_r - b_2^r \frac{\partial H}{\partial q_r} \right) = \frac{d b_2^3}{dt} p_\vartheta + \frac{d b_2^4}{dt} p_\varphi + \frac{d b_2^5}{dt} p_\psi - b_2^3 \frac{\partial H}{\partial \vartheta} =$$

$$= - \frac{\epsilon a}{CA} [\cos\vartheta \operatorname{sen}\psi \, p_\vartheta \, p_\varphi + \frac{\cos\psi}{\operatorname{sen}\vartheta} (p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta) \, p_\varphi \, .$$

Per i risultati ora ottenuti e per la (2.7), le (1.13) nel nostro caso diventano

$$(2.10_1) \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{p_\xi}{m}, \quad \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{p_\eta}{m}, \quad \dfrac{d\vartheta}{dt} = \dfrac{p_\vartheta}{A}, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \left(\dfrac{1}{A \operatorname{sen}^2 \vartheta} - \dfrac{\epsilon}{C} \right) p_\varphi - \dfrac{\cos\vartheta}{A \operatorname{sen}^2 \vartheta} \, p_\psi , \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta}{A \operatorname{sen}^2 \vartheta}, \end{cases}$$

$$
(2.10_2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dp_\xi}{dt} &= \epsilon a m p_\varphi \left\{ \frac{\cos\vartheta \cos\psi}{CA_1 - Ama^2 \epsilon \operatorname{sen}^2\vartheta}\, p_\vartheta - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\operatorname{sen}\psi}{A_1 C \operatorname{sen}\vartheta}\,(p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta) \right\}, \\
\frac{dp_\eta}{dt} &= \epsilon a m p_\varphi \left\{ \frac{\cos\vartheta \operatorname{sen}\psi}{CA_1 - Ama^2 \epsilon \operatorname{sen}^2\vartheta}\, p_\vartheta + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\cos\psi}{A_1 C \operatorname{sen}\vartheta}\,(p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta) \right\}, \\
\frac{dp_\vartheta}{dt} &= \frac{\cos\vartheta\,(p_\varphi^2 + p_\psi^2) - (1+\cos^2\vartheta)\, p_\varphi p_\psi}{A \operatorname{sen}^3\vartheta} + \\
&\quad + \frac{m\epsilon a^2}{A_1 C \operatorname{sen}\vartheta}\,(p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta)\, p_\varphi , \\
\frac{dp_\varphi}{dt} &= \frac{\epsilon a^2 m \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta}{CA_1 - Ama^2 \epsilon \operatorname{sen}^2\vartheta}\, p_\vartheta\, p_\varphi , \\
\frac{dp_\psi}{dt} &= 0 .
\end{aligned}
\right.
$$

Le equazioni dei vincoli anolonomi (2.5), ricordando le (1.15), per le (2.9) assumono la forma

$$
(2.11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{p_\xi}{m} - \frac{a \operatorname{sen}\psi}{A}\, p_\vartheta + a \operatorname{sen}\vartheta \cos\psi \left(\frac{1}{A \operatorname{sen}^2\vartheta} - \frac{\epsilon}{C} \right) p_\varphi - \\
&\qquad - \frac{a \cos\vartheta \cos\psi}{A \operatorname{sen}\vartheta}\, p_\psi = 0 . \\
&\frac{p_\eta}{m} + \frac{a \cos\psi}{A}\, p_\vartheta + a \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\psi \left(\frac{1}{A \operatorname{sen}^2\vartheta} - \frac{\epsilon}{C} \right) p_\varphi - \\
&\qquad - \frac{a \cos\vartheta \operatorname{sen}\psi}{A \operatorname{sen}\vartheta}\, p_\psi = 0
\end{aligned}
\right.
$$

da cui si ottengono

(2.12)
$$p_\xi = ma\left[\frac{\operatorname{sen}\psi}{A}p_\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta\cos\psi\left(\frac{1}{A\operatorname{sen}^2\vartheta}-\frac{\epsilon}{C}\right)p_\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{\cos\vartheta\cos\psi}{A\operatorname{sen}\vartheta}\,p_\psi\right],$$
$$p_\eta = -ma\left[\frac{\cos\psi}{A}p_\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\psi\left(\frac{1}{A\operatorname{sen}^2\vartheta}-\frac{\epsilon}{C}\right)p_\varphi - \right.$$
$$\left. - \frac{\cos\vartheta\operatorname{sen}\psi}{A\operatorname{sen}\vartheta}\,p_\psi\right].$$

Confrontando le (2.12) con le (1.18) deduciamo

$$\overset{3}{\gamma}_1 = -\frac{ma\operatorname{sen}\psi}{A}\,,\quad \overset{4}{\gamma}_1 = ma\cos\psi\left(\frac{1}{A\operatorname{sen}\vartheta}-\frac{\epsilon}{C}\operatorname{sen}\vartheta\right),$$
$$\overset{5}{\gamma}_1 = -\frac{ma\cos\vartheta\cos\psi}{A\operatorname{sen}\vartheta}\,,$$

$$\overset{3}{\gamma}_2 = \frac{ma\cos\psi}{A}\,,\quad \overset{4}{\gamma}_2 = ma\operatorname{sen}\psi\left(\frac{1}{A\operatorname{sen}\vartheta}-\frac{\epsilon}{C}\operatorname{sen}\vartheta\right),$$
$$\overset{5}{\gamma}_2 = -\frac{ma\cos\vartheta\operatorname{sen}\psi}{A\operatorname{sen}\vartheta}\,.$$

In questo problema, essendo $U = -mga = \text{cost}$, le equazioni (1.21′) diventano omogenee nelle incognite $p_\xi, p_\eta, p_\vartheta, p_\varphi, p_\psi$ e quindi ammettono la soluzione nulla. Inoltre il sistema (1.22) di equazioni lineari omogenee nelle medesime incognite, ora nella forma

$$\left\{\begin{array}{l} p_\xi - \dfrac{am\,\mathrm{sen}\,\psi}{A}\,p_\vartheta + am\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\psi\left(\dfrac{1}{A\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta} - \dfrac{\epsilon}{C}\right)p_\varphi - \\ \qquad\qquad - \dfrac{am\cos\vartheta\cos\psi}{A\,\mathrm{sen}\,\vartheta}\,p_\psi = 0 \\ p_\eta + \dfrac{am\cos\psi}{A}\,p_\vartheta + am\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\psi\left(\dfrac{1}{A\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta} - \dfrac{\epsilon}{C}\right)p_\varphi - \\ \qquad\qquad - \dfrac{am\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\psi}{A\,\mathrm{sen}\,\vartheta}\,p_\psi = 0 \\ a\,(p_\xi\,\mathrm{sen}\,\psi - p_\eta\cos\psi) + p_\vartheta = 0 \\ -a\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,(p_\xi\cos\psi + p_\eta\,\mathrm{sen}\,\psi) + p_\varphi - \\ \qquad\qquad - \dfrac{C\cos\vartheta}{C\cos^2\vartheta + A\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}\,p_\psi = 0 \\ a\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta\,(p_\xi\cos\psi + p_\eta\,\mathrm{sen}\,\psi) - \cos\vartheta\,p_\varphi + p_\psi = 0, \end{array}\right.$$

ha il determinante dei coefficienti che vale $A_1\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta\left(\dfrac{1}{C\cos^2\vartheta + A\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta} + \dfrac{a^2 m}{AC}\right) \neq 0$. Dunque la soluzione nulla è unica. Pertanto come soluzioni stazionarie delle equazioni (2.10) troviamo

$$p_\xi = 0, \quad p_\eta = 0, \quad p_\vartheta = 0, \quad p_\varphi = 0, \quad p_\psi = 0,$$

$$\xi = \xi_0, \quad \eta = \eta_0, \quad \vartheta = \vartheta_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \psi = \psi_0,$$

con $\xi_0, \eta_0, \vartheta_0, \varphi_0, \psi_0$ costanti arbitrarie cioè una classe ∞^5 di soluzioni statiche.

Osserviamo che le equazioni (2.10) ammettono tre integrali primi. Infatti se dalla quarta delle (2.10_2), moltiplicata per $\dfrac{\epsilon A}{C}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\psi$, si sottrae membro a membro la seconda di queste moltiplicata per $\dfrac{A_1}{am}$, tenuto conto della terza e dell'ultima delle (2.10_1), si ottiene

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\epsilon A}{C}\,p_\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\psi - \frac{A_1}{am}\,p_\eta\right] = 0$$

da cui si deduce l'integrale primo

$$(2.13_1) \qquad K_1 \equiv \frac{\epsilon A}{CA_1} p_\varphi \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\psi - \frac{1}{am} p_\eta = \frac{c_1}{A_1}$$

avendo indicato con c_1 una costante d'integrazione. Analogamente se dalla prima delle (2.10_2), moltiplicata per $\frac{A_1}{am}$, si sottrae membro a membro la quarta moltiplicata per $\frac{\epsilon A}{C} \operatorname{sen}\vartheta \cos\psi$ si deduce l'integrale primo

$$(2.13_2) \qquad K_2 \equiv \frac{1}{am} p_\xi - \frac{\epsilon A}{CA_1} \operatorname{sen}\vartheta \cos\psi\, p_\varphi = \frac{c_2}{A_1}$$

ed infine dall'ultima delle (2.10_2) segue

$$(2.13_3) \qquad K_3 \equiv p_\psi = c_3$$

essendo c_2 e c_3 costanti arbitrarie.

I tre integrali primi ottenuti non sono altro che gli integrali scalari del momento delle quantità di moto rispetto ad 0 della sfera, come è facile verificare partendo dalle (14) del lavoro [4] tenendo conto delle (2.1'), (2.2), (2.3) e (2.10_1) della presente Nota.

Cerchiamo ora le soluzioni del sistema canonico (2.10) che rendono stazionaria l'energia totale H, subordinatamente sia alle relazioni invarianti (2.11) che agli integrali primi (2.13).

Introduciamo i moltiplicatori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$ ed imponiamo la condizione di stazionarietà

$$(2.14) \qquad \delta H + \lambda_1\, \delta K_1 + \lambda_2\, \delta K_2 + \lambda_3\, \delta K_3 + \mu_1\, \delta f_1 + \mu_2\, \delta f_2 = 0,$$

essendo f_1 ed f_2 i primi membri delle (2.11).

Poiché le funzioni H, K_1, K_2, K_3, f_1, f_2, non dipendono da ξ, η e φ, le condizioni che si deducono dalla (2.14) annullando i coefficienti di $\delta\xi$, $\delta\eta$ e $\delta\varphi$ si riducono a tre identità. Otteniamo dalla (2.14)

$$(2.15_1)\qquad -\frac{1}{A\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}[\cos\vartheta(p_\varphi^2+p_\psi^2)-(1+\cos^2\vartheta)p_\varphi p_\psi\,]+$$

$$+\frac{A\epsilon}{A_1 C}\cos\vartheta\, p_\varphi\,(\lambda_1\,\mathrm{sen}\,\psi-\lambda_2\cos\psi)+$$

$$+a(\mu_1\cos\psi+\mu_2\,\mathrm{sen}\,\psi)\left[-p_\varphi\cos\vartheta\left(\frac{1}{A\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\epsilon}{C}\right)+\frac{p_\psi}{A\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}\right]=0\,,$$

$$(2.15_2)\qquad \frac{\epsilon A}{CA_1}p_\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,(\lambda_1\cos\psi+\lambda_2\,\mathrm{sen}\,\psi)-$$

$$-\frac{a}{A}p_\vartheta\,(\mu_1\cos\psi+\mu_2\,\mathrm{sen}\,\psi)-$$

$$-a\left[\left(\frac{1}{A\,\mathrm{sen}\,\vartheta}-\frac{\epsilon}{C}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right)p_\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{\cos\vartheta}{A\,\mathrm{sen}\,\vartheta}p_\psi\right](\mu_1\,\mathrm{sen}\,\psi-\mu_2\cos\psi)=0,$$

$$(2.15_3)\qquad ap_\xi+\lambda_2+a\mu_1=0,$$

$$(2.15_4)\qquad ap_\eta-\lambda_1+a\mu_2=0,$$

$$(2.15_5)\qquad p_\vartheta-a\,(\mu_1\,\mathrm{sen}\,\psi-\mu_2\cos\psi)=0\,,$$

$$(2.15_6)\qquad \left(\frac{1}{A\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}-\frac{\epsilon}{C}\right)p_\varphi-\frac{\cos\vartheta}{A\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}\,p_\psi+$$

$$+\frac{\epsilon A}{CA_1}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,(\lambda_1\,\mathrm{sen}\,\psi-\lambda_2\cos\psi)+$$

$$+a\,\mathrm{sen}\,\vartheta\left(\frac{1}{A\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}-\frac{\epsilon}{C}\right)(\mu_1\cos\psi+$$

$$+\mu_2\,\mathrm{sen}\,\psi)=0\,,$$

$$(2.15_7)\qquad \frac{p_\psi}{A \operatorname{sen}^2 \vartheta} - \frac{\cos\vartheta}{A \operatorname{sen}^2 \vartheta}\, p_\varphi - \\ - \frac{a\cos\vartheta}{A\operatorname{sen}\vartheta}\,(\mu_1 \cos\psi + \mu_2 \operatorname{sen}\psi) + \lambda_3 = 0 \,.$$

Per ricavare le espressioni dei moltiplicatori possiamo scrivere per le (2.15_4) e (2.15_3)

$$(2.16)\qquad \lambda_1 = a\,\mu_2 + a\,p_\eta \quad , \quad \lambda_2 = -\,a\mu_1 - a\,p_\xi$$

e sostituendo nella (2.15_6), tenuto conto delle (2.12), abbiamo

$$\mu_1 \cos\psi + \mu_2 \operatorname{sen}\psi = \frac{1}{a\operatorname{sen}\vartheta}\Big[\, p_\psi \cos\vartheta - \\ - p_\varphi \Big(1 - \frac{\epsilon}{C} A \operatorname{sen}^2\vartheta\Big)\Big]$$

che associata alla

$$(2.15'_5)\qquad \mu_1 \operatorname{sen}\psi - \mu_2 \cos\psi = \frac{p_\vartheta}{a}$$

fornisce, ricordando le (2.16) e (2.15_7), i moltiplicatori

$$\mu_1 = \frac{p_\vartheta}{a}\operatorname{sen}\psi + \frac{\cos\psi}{a\operatorname{sen}\vartheta}\Big[\, p_\psi \cos\vartheta - \\ - p_\varphi \Big(1 - \frac{\epsilon}{C} A \operatorname{sen}^2\vartheta\Big)\Big] \,,$$

$$(2.17)\qquad \mu_2 = -\frac{p_\vartheta}{a}\cos\psi + \frac{\operatorname{sen}\psi}{a\operatorname{sen}\vartheta}\Big[\, p_\psi \cos\vartheta - \\ - p_\varphi \Big(1 - \frac{\epsilon}{C} A \operatorname{sen}^2\vartheta\Big)\Big] \,,$$

$$\lambda_1 = -\,p_\vartheta \cos\psi + \frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\vartheta}\Big[\, p_\psi \cos\vartheta - \\ - p_\varphi \Big(1 - \frac{\epsilon}{C} A \operatorname{sen}^2\vartheta\Big)\Big] + a\,p_\eta \;,$$

$$\lambda_2 = -p_\vartheta \operatorname{sen}\psi - \frac{\cos\psi}{\operatorname{sen}\vartheta}\left[p_\psi \cos\vartheta - \right.$$
$$\left. - p_\varphi \left(1 - \frac{\epsilon}{C} A \operatorname{sen}^2\vartheta\right)\right] - a\, p_\xi \quad , \tag{2.17}$$

$$\lambda_3 = -\frac{p_\psi}{A} + \frac{\epsilon}{C} \cos\vartheta\, p_\varphi \ .$$

Pertanto la (2.15_1) diventa

$$\frac{\epsilon}{C}\frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}\, p_\varphi\,(p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta) = 0$$

da cui si deduce $p_\varphi = 0$ oppure $p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta = 0$.

Nell'ipotesi che sia $p_\psi = p_\varphi \cos\vartheta$, dalle (2.17) si deduce che

$$\lambda_1 \cos\psi + \lambda_2 \operatorname{sen}\psi = -p_\vartheta + a\,(p_\eta \cos\psi - p_\xi \operatorname{sen}\psi),$$

$$\mu_1 \cos\psi + \mu_2 \operatorname{sen}\psi = \frac{1}{a}\, p_\varphi \operatorname{sen}\vartheta \left(\frac{\epsilon}{C} A - 1\right)$$

e sostituendo nella (2.15_2), ricordando la $(2.15'_5)$ e le (2.12), si ricava $p_\vartheta = 0$ oppure $p_\varphi = 0$.

Nel caso in cui $p_\vartheta = 0, p_\psi = p_\varphi \cos\vartheta$ dalle (2.10_2) si ha

$$\frac{dp_\xi}{dt} = 0, \quad \frac{dp_\eta}{dt} = 0, \quad \frac{dp_\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{dp_\psi}{dt} = 0$$

e quindi risulta

$$p_\xi = \overset{(0)}{p_\xi}, \quad p_\eta = \overset{(0)}{p_\eta}, \quad p_\varphi = \overset{(0)}{p_\varphi}, \quad p_\psi = \overset{(0)}{p_\psi}$$

con $\overset{(0)}{p_\xi}, \overset{(0)}{p_\eta}, \overset{(0)}{p_\varphi}, \overset{(0)}{p_\psi}$ costanti; dalle (2.10_1) si deduce allora

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\overset{(0)}{p_\xi}}{m}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\overset{(0)}{p_\eta}}{m}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{C}\overset{(0)}{p_\varphi}$$

e quindi si ottiene

$$\xi - \xi_0 = \frac{\overset{(0)}{p_\xi}}{m}(t - t_0), \quad \eta - \eta_0 = \frac{\overset{(0)}{p_\eta}}{m}(t - t_0),$$

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \psi = \psi_0, \quad \varphi - \varphi_0 = \frac{1}{C}\overset{(0)}{p_\varphi}(t - t_0)$$

con $\xi_0, \eta_0, \vartheta_0, \psi_0, \varphi_0, p_\varphi^{(0)}$ costanti arbitrarie.

Essendo dalle (2.12)

$$\overset{(0)}{p_\xi} = -\frac{1}{C} ma \cos\psi_0 \operatorname{sen}\vartheta_0 \overset{(0)}{p_\varphi},$$

$$\overset{(0)}{p_\eta} = -\frac{1}{C} ma \operatorname{sen}\psi_0 \operatorname{sen}\vartheta_0 \overset{(0)}{p_\varphi},$$

si è così ottenuta una classe ∞^6 di soluzioni.

Il centro 0 della sfera si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $\frac{a}{C} \operatorname{sen}\vartheta_0 |\overset{(0)}{p_\varphi}|$ nella direzione orizzontale, inclinata all'asse ξ dell'angolo ψ_0.

Nel caso $p_\varphi = 0$, $p_\psi = p_\varphi \cos\vartheta = 0$ dalle (2.10_2) si hà

$$\frac{dp_\xi}{dt} = 0, \quad \frac{dp_\eta}{dt} = 0, \quad \frac{dp_\vartheta}{dt} = 0$$

da cui si ottiene $p_\xi = \overset{(0)}{p_\xi}$, $p_\eta = \overset{(0)}{p_\eta}$, $p_\vartheta = \overset{(0)}{p_\vartheta}$ e dalle (2.10_1) $\varphi = \varphi_0$, $\psi = \psi_0$, essendo costanti $\overset{(0)}{p_\xi}$, $\overset{(0)}{p_\eta}$, $\overset{(0)}{p_\vartheta}$, φ_0 e ψ_0.

Pertanto la terza delle (2.10_1) diventa $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\overset{(0)}{p_\vartheta}}{A}$ da cui si deduce $\vartheta - \vartheta_0 = \frac{\overset{(0)}{p_\vartheta}}{A}(t - t_0)$.

Inoltre risulta

$$\xi - \xi_0 = \frac{\overset{(0)}{p_\xi}}{m}(t - t_0), \quad \eta - \eta_0 = \frac{\overset{(0)}{p_\eta}}{m}(t - t_0)$$

dove per le (2.12)

$$\overset{(0)}{p_\xi} = \frac{ma}{A} \operatorname{sen}\psi_0 \overset{(0)}{p_\vartheta} \quad , \quad \overset{(0)}{p_\eta} = - \frac{ma}{A} \cos\psi_0 \overset{(0)}{p_\vartheta} \quad .$$

Essendo $\xi_0, \eta_0, \vartheta_0, \varphi_0, \psi_0$ e $\overset{(0)}{p_\vartheta}$ costanti arbitrarie si ha così una classe ∞^6 di soluzioni. Il centro 0 della sfera descrive sul piano orizzontale passante per esso una traiettoria rettilinea di coefficiente angolare $-ctg\,\psi_0$ con velocità $\frac{a}{A} | \overset{(0)}{p_\vartheta} |$.

Nel caso in cui $p_\varphi = 0$, la (2.15_2) è identicamente soddisfatta e dalle (2.10_2) si deduce

$$\frac{dp_\xi}{dt} = 0 \,, \quad \frac{dp_\eta}{dt} = 0, \quad \frac{dp_\vartheta}{dt} = \frac{p_\psi^2}{A \operatorname{sen}^3 \vartheta} \cos\vartheta \,,$$

$$\frac{dp_\psi}{dt} = 0 \quad ;$$

quindi si ottiene

$$p_\xi = \overset{(0)}{p_\xi} , \quad p_\eta = \overset{(0)}{p_\eta} , \quad p_\psi = \overset{(0)}{p_\psi} \quad ;$$

$$(\overset{(0)}{p_\xi} , \overset{(0)}{p_\eta} , \overset{(0)}{p_\psi} \quad \text{costanti}) \,.$$

Le (10_1) pertanto diventano

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\overset{(0)}{p_\xi}}{m} \,, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\overset{(0)}{p_\eta}}{m} \,, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{p_\vartheta}{A} \,, \tag{2.18}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \frac{\cos\vartheta}{A \operatorname{sen}^2 \vartheta} \overset{(0)}{p_\psi} \,, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{A \operatorname{sen}^2 \vartheta} \overset{(0)}{p_\psi} \,,$$

mentre l'equazione

$$\frac{dp_\vartheta}{dt} = (\overset{(0)}{p_\psi})^2 \frac{\cos\vartheta}{A \operatorname{sen}^3 \vartheta}$$

per la terza delle (2.18) si può scrivere

$$p_\vartheta \frac{d p_\vartheta}{d\vartheta} = (p_\psi^{(0)})^2 \frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}^3\vartheta} .$$

Integrando si ottiene

$$(2.19) \qquad p_\vartheta^2 = \mathscr{C}^2 - \left(\frac{p_\psi^{(0)}}{\operatorname{sen}\vartheta}\right)^2 , \qquad \mathscr{C} \text{ costante ,}$$

per cui risulta

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \pm \frac{\sqrt{\mathscr{C}^2 \operatorname{sen}^2\vartheta - (p_\psi^{(0)})^2}}{A \operatorname{sen}\vartheta}$$

e quindi

$$\pm \frac{1}{\mathscr{C}} \arccos \frac{\mathscr{C}\cos\vartheta}{\sqrt{\mathscr{C}^2 - (p_\psi^{(0)})^2}} = \frac{t-t_0}{A} ,$$

$$\text{se } \frac{|\mathscr{C}|\cos\vartheta}{\sqrt{\mathscr{C}^2 - (p_\psi^{(0)})^2}} \leqslant 1 .$$

Pertanto si ha

$$(2.20) \qquad \cos\vartheta = \frac{1}{\mathscr{C}}\sqrt{\mathscr{C}^2 - (p_\psi^{(0)})^2} \cos\left[\frac{\mathscr{C}}{A}(t-t_0)\right]$$

e quindi le ultime due delle (2.18) diventano

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{p_\psi^{(0)}}{A\mathscr{C}} \frac{\sqrt{\mathscr{C}^2 - (p_\psi^{(0)})^2}\cos\left[\frac{\mathscr{C}}{A}(t-t_0)\right]}{\operatorname{sen}^2\left[\frac{\mathscr{C}}{A}(t-t_0)\right] + \left(\frac{p_\psi^{(0)}}{\mathscr{C}}\right)^2 \cos^2\left[\frac{\mathscr{C}}{A}(t-t_0)\right]} ,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{p_\psi^{(0)}}{A} \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left[\frac{\mathscr{C}}{A}(t-t_0)\right] + \left(\frac{p_\psi^{(0)}}{\mathscr{C}}\right)^2 \cos^2\left[\frac{\mathscr{C}}{A}(t-t_0)\right]}$$

che si possono integrare facilmente. In definitiva risulta

$$\vartheta = \arccos \left\{ \frac{1}{\mathscr{C}} \sqrt{\mathscr{C}^2 - (p_\psi^{(0)})^2} \quad \cos \left[\frac{\mathscr{C}}{A} (t - t_0) \right] \right\} \quad ,$$

$$\varphi - \varphi_0 = - \operatorname{arctg} \left\{ \frac{1}{p_\psi^{(0)}} \sqrt{\mathscr{C}^2 - (p_\psi^{(0)})^2} \operatorname{sen} \left[\frac{\mathscr{C}}{A} (t - t_0) \right] \right\} \quad ,$$

$$\psi - \psi_0 = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\mathscr{C}}{p_\psi^{(0)}} \, tg \left[\frac{\mathscr{C}}{A} (t - t_0) \right] \right\} ,$$

$$\xi - \xi_0 = \frac{\overset{(0)}{p_\xi}}{m} (t - t_0) \quad , \quad \eta - \eta_0 = \frac{\overset{(0)}{p_\eta}}{m} (t - t_0)$$

con $\varphi_0, \psi_0, \xi_0, \eta_0$ costanti arbitrarie.

Poiché dalle (2.12) si deduce

$$\overset{(0)}{p_\xi} = ma \left[\frac{\operatorname{sen} \psi_0}{A} \overset{(0)}{p_\vartheta} + \frac{\cos \vartheta_0 \cos \psi_0}{A \operatorname{sen} \vartheta_0} \overset{(0)}{p_\psi} \right] \quad ,$$

$$\overset{(0)}{p_\eta} = - ma \left[\frac{\cos \psi_0}{A} \overset{(0)}{p_\vartheta} - \frac{\cos \vartheta_0 \operatorname{sen} \psi_0}{A \operatorname{sen} \vartheta_0} \overset{(0)}{p_\psi} \right] \quad ,$$

essendo per le (2.19) e (2.20)

$$[\overset{(0)}{p_\vartheta}]^2 = \mathscr{C}^2 - \left(\frac{\overset{(0)}{p_\psi}}{\operatorname{sen} \vartheta_0} \right)^2 \quad ,$$

$$\vartheta_0 = \arccos \left[\frac{1}{\mathscr{C}} \sqrt{\mathscr{C}^2 - (p_\psi^{(0)})^2} \right] \quad ,$$

con $\mathscr{C}$ e $\overset{(0)}{p_\psi}$ costanti arbitrarie, si ottiene una classe ∞^6 di soluzioni. Inoltre il centro della sfera si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $\frac{a}{A} \sqrt{\mathscr{C}^2 - (p_\psi^{(0)})^2}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Agostinelli C. - *Nuova forma sintetica delle equazioni del moto di un sistema anolonomo ed esistenza di un integrale lineare nelle velocità lagrangiane,* «Bollettino della Un. Mat. Ital.», marzo 1956, serie III, anno XI, n. 1, 1-9.

[2] Agostinelli C. - *Nuove forme delle equazioni del moto di un sistema anolonomo,* «Rendiconti di Matematica», 1975, vol. 8, serie VI, 143-160.

[3] Agostinelli C. - *Lezioni di Meccanica Superiore*, Editore Giorgio, Torino, 1948.

[4] Agostinelli C. - *Sul moto di rotolamento su un piano orizzontale di una sfera pesante a struttura giroscopica rispetto a un diametro,* «Rivista di Matematica della Università di Parma», 3, 1952, 327-338.